שימו לב: כל המרחבים במבחן זה הם ממימד סופי.

במבחן זה מדובר במכפלות הפנימיות הסטנדרטיות למרחבים המתאימים.

יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1

(13 נקודות) א. יהיו $u_1=(1,-2,3,4), u_2=(3,-5,7,8)$ ויהי $W=Sp\{u_1,u_2\}$.

1. מצאו בסיס אורתונורמלי של $W^\perp$ ב- $\mathbf{R}^4$.
2. מצאו את ההיטל האורתוגונלי של הוקטור $v=(1,0,1,0)$ על $W^\perp$.

(12 נקודות) ב. תהי $T:V\to V$ טרנספורמציה הרמיטית. הוכיחו כי $I+iT$ טרנספורמציה הפיכה.

שאלה 2

תהי $q:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R},\quad q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$,

תבנית ריבועית מעל $\mathbf{R}^3$.

(13 נקודות) א. מצאו בסיס של $\mathbf{R}^3$ שבו q בעלת הצגה אלכסונית.

(6 נקודות) ב. האם קיים בסיס שבו המטריצה שמייצגת את q היא $\begin{pmatrix}5&4&0\\4&6&0\\0&0&1\end{pmatrix}$?

(6 נקודות) ג. מצאו תת-מרחב U של $\mathbf{R}^3$ ממימד גדול ביותר, כך ש- q חיובית לחלוטין על U.

שאלה 3

נתונה המטריצה $B=\begin{pmatrix}1&-3&0&3\\-2&-6&0&13\\0&-3&1&3\\-1&-4&0&8\end{pmatrix}$.

(13 נקודות) א. מצאו את צורת ז'ורדן J_B של המטריצה B.

(12 נקודות) ב. האם כל מטריצה מהצורה B^n , $n\ge 1$, שייכת למרחב $W=span\{I,B,B^2\}$?

שאלה 4

(13 נקודות) א. יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהי $w_0 \in V$ וקטור המקיים $\|w_0\| = 1$.

נגדיר העתקה לינארית $T : V \to V$ על ידי: $T(v) = v - 2(v, w_0)w_0$,

לכל $v \in V$. הוכיחו כי T טרנספורמציה צמודה לעצמה ואוניטרית.

(12 נקודות) ב. יהי T טרנספורמציה לינארית במרחב מכפלה פנימית. נתון ש- $T^*T = I$.

הוכיחו שאם W תת-מרחב T-שמור אז $W^{\perp}$ הוא תת-מרחב T-שמור.

שאלה 5

(13 נקודות) א. היעזרו במשפט קיילי-המילטון כדי למצוא את A^9 כאשר $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(12 נקודות) ב. תהיינה $\ell_1 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ ו- $\ell_2 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ העתקות ליניאריות.

מניחים ש- $n \geq 2$, $\ell_1 \neq 0$ ו- $\ell_2 \neq 0$. נגדיר תבנית ריבועית $q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

על ידי $q(x) = \ell_1(x) \cdot \ell_2(x)$, לכל $x = (x_1, ..., x_n)$ ב- $\mathbf{R}^n$.

1. הוכיחו שקיים תת-מרחב ממימד $n-1$ של $\mathbf{R}^n$ שעליו q מתאפסת.
2. הוכיחו שהסימנית של q שווה ל- 0 או 1 או -1.

רמז: בחר בסיס מתאים להצגה של q.

בהצלחה!