שימו לב: כל המרחבים במבחן זה הם ממימד סופי.

במבחן זה מדובר במכפלות הפנימיות הסטנדרטיות למרחבים המתאימים.

יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1

יהיו $u_1=\frac{1}{2}(1,1,1,1), u_2=\frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$ ויהי $W=Sp(u_1,u_2)$.

(10 נקודות) א. מצאו בסיס אורתונורמלי של $W^{\perp}$ ב- $\mathbf{R}^4$.

(15 נקודות) ב. תהי $T:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^4$ טרנספורמציה לינארית שמקיימת

$T(u_1)=u_2$, $T(u_2)=-u_1$ ו- $KerT=W^{\perp}$.

1. האם T טרנספורמציה נורמלית ? האם T טרנספורמציה לכסינה ?

2. מצאו את $T\left((1,2,3,4)\right)$.

רמז: אין צורך לחשב את $[T]_E$, כאשר E מסמן את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^4$.

שאלה 2

תהי $q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_3+8x_2^2+2x_3^2$ תבנית ריבועית מעל $\mathbf{R}^3$.

(10 נקודות) א. מצאו בסיס של $\mathbf{R}^3$ שבו q בעלת הצגה אלכסונית.

(10 נקודות) ב. האם קיים בסיס שבו המטריצה שמייצגת את q היא $\begin{pmatrix}1&2&0\\2&9&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}$?

(5 נקודות) ג. מצאו בסיס למרחב $W=\left\{x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3 : q(x)=0\right\}$.

שאלה 3

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\-2&-6&13\\-1&-4&8\end{pmatrix}$.

(12 נקודות) א. מצאו את צורת ז'ורדן J_A של A.

(11 נקודות) ב. מצאו מטריצה הפיכה P המקיימת $J_A=P^{-1}AP$.

(2 נקודות) ג. האם יש פתרון יחיד לשאלה בסעיף הקודם ?

שאלה 4

(12 נקודות) א. יהי V מרחב אוניטרי ממימד סופי ויהיו L_1 ו- L_2 תתי-מרחב שלו כך ש- $V = L_1 \oplus L_2$. תהי P טרנספורמציית ההיטל על L_1 במקביל ל- L_2.

הוכיחו כי P טרנספורמציה צמודה לעצמה אם ורק אם $L_2 = L_1^{\perp}$.

(13 נקודות) ב. יהי T טרנספורמציה לינארית במרחב מכפלה פנימית.

הוכיחו שאם W תת-מרחב T-שמור אז $W^{\perp}$ הוא תת-מרחב T^*-שמור.

שאלה 5

(12 נקודות) א. נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. מצא בסיס B למרחב

$W = span\left\{I, A, A^2, A^3, ..., A^n, ...\right\}$ ומצאו את הקואורדינטות של

A^{100} לפי הבסיס B. רמז : אפשר להשתמש במשפט Cayley-Hamilton.

(13 נקודות) ב. נתון שדה F כך ש- $charF \neq 2$. יהיו ℓ_1 ו- ℓ_2 תבניות ליניאריות על מרחב V.

1. נניח כי לכל $v \in V$ מתקיים $\ell_1(v)\ell_2(v) = 0$. הוכיחו ש- $\ell_1 = 0$ או $\ell_2 = 0$.

2. הוכיחו שאם f תבנית ביליניארית אנטי-סימטרית ו- $f \neq 0$, אז לא יתכן כי $f(u,v) = \ell_1(u)\ell_2(v)$, לכל $u, v \in V$.

__בהצלחה!__