שימו לב: כל המרחבים במבחן זה הם ממימד סופי.
במבחן זה מדובר במכפלות הפנימיות הסטנדרטיות למרחבים המתאימים.

יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1 נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

(13 נקודות) א. נגדיר פונקציה $f:\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ על ידי:
$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=(A\mathbf{x},\mathbf{y})$, לכל $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)^t,\ \mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)^t$ ב- $\mathbf{R}^3$.
האם הפונקציה f מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbf{R}^3$?

(12 נקודות) ב. מצא מטריצה סימטרית B כך ש- $B^2=A$. (המטריצה A מוגדרת לעיל).
רמז אפשרי: משפט *Cayley-Hamilton*.

שאלה 2

(13 נקודות) א. חשב את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימאלי של $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

מצא את הפרוק הפרימרי של $\mathbf{R}^3$ במקרה זה, וכתוב מטריצת בלוקים אלכסונית הדומה ל- A .

(12 נקודות) ב. מצא את צורת ז'ורדן של המטריצה A המוגדרת בסעיף א'.
מצא גם את מטריצת המעבר לבסיס שבו היא מוצגת בצורת ז'ורדן.

שאלה 3

(13 נקודות) א. תהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית במרחב מכפלה פנימית.
נתון ש- $T(T^*-3I)+2I=0$. הוכח ש- T טרנספורמציה חיובית לחלוטין
ומצא את כל הערכים העצמיים האפשריים של T .

(12 נקודות) ב. תהי $q:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}$ התבנית הריבועית: $q(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_4-6x_2x_3$.
כתוב את התבנית כסכום של ריבועים. מצא את הדרגה ואת הסימנית של q .

שאלה 4

(7 נקודות) א. תהי $A=\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.

מצא פולינום $0\neq Q(t)=at^2+bt+c\in \mathbf{C}_3[t]$ כך ש- $[Q(A)]^2=0$.

(10 נקודות) ב. תהי $A\in M_{n\times n}^{\mathbf{F}}$ מטריצה שאינה ניתנת ללכסון. הוכח שאם $\mathbf{F}=\mathbf{C}$, אז קיים פולינום $0\neq Q(t)\in \mathbf{C}_n[t]$ (כלומר פולינום $0 \neq$ וממעלה קטנה מ- n) כך ש- $[Q(A)]^2=0$.

(8 נקודות) ג. האם הטענה הקודמת נכונה כאשר $\mathbf{F}=\mathbf{R}$?

שאלה 5

תהי $f:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ פונקציה מוגדרת לפי: $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=n\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-m_{\mathbf{x}}\right)\left(y_i-m_{\mathbf{y}}\right)$, כאשר

$\mathbf{x}=(x_1,...,x_n),\ \ \mathbf{y}=(y_1,...,y_n),\ \ m_{\mathbf{x}}=\frac{x_1+...+x_n}{n},\ \ m_{\mathbf{y}}=\frac{y_1+...+y_n}{n}$.

(5 נקודות) א. בדוק שפונקציה זו היא תבנית ביליניארית סימטרית.

(5 נקודות) ב. מצא את המטריצה המייצגת של f לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^n$.

(10 נקודות) ג. נסמן ב- A את המטריצה שמצאת בסעיף ב'. מצא את צורת ז'ורדן של A.

(5 נקודות) ד. בדוק ש- $0\le f(\mathbf{x},\mathbf{x})\le n\|\mathbf{x}\|^2$, לכל $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$.