שימו לב: כל המרחבים במבחן זה הם ממימד סופי.
במבחן זה מדובר במכפלות הפנימיות הסטנדרטיות למרחבים המתאימים.

יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1

במרחב $V = M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, נגדיר טרנספורמציה לינארית S על ידי:

$S(A) = \dfrac{A - A^t}{2}$, לכל $A \in M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$.

(8 נקודות) א. האם הטרנספורמציה S צמודה לעצמה? אוניטרית? נורמלית?

(8 נקודות) ב. מצא את הפולינום המינימלי ואת הפולינום האופייני של S.

(9 נקודות) ג. מצא בסיס אורתונורמלי B של V כך ש- $[S]_B$ מטריצה אלכסונית.

רמז: בדוק שהטרנספורמציה הלינארית $T(A) = A^t$ צמודה לעצמה.

שאלה 2

נתונה תבנית ריבועית $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $q(x_1, x_2, x_3) = ax_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 5x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2$.

(13 נקודות) א. מצא את כל הערכים של הפרמטר $a \in \mathbf{R}$ שעבורם התבנית הריבועית הממשית q שלילית למחצה. פתור את השאלה בשיטת החפיפה האלמנטרית.

(12 נקודות) ב. יהי $a = -1$. מצא תת-מרחב $W \subseteq \mathbf{R}^3$ ממימד מקסימאלי כך שיתקיים $q(w) \geq 0$, לכל $w \in W$.

שאלה 3

(5 נקודות) א. יהיו $a, b \in \mathbf{R}$. האם המטריצות $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ דומות?

(20 נקודות) ב. נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. מצא את צורת ז'ורדן של A.

2. מצא את צורת ז'ורדן של A^{2008}.

שאלה 4

(12 נקודות) א. הוכח שאם A מטריצה ממשית הפיכה אז $AA^t + A^tA$ מטריצה הפיכה.

(13 נקודות) ב. תהי A מטריצה מסדר 3 בעלת ערכים עצמיים ממשיים בלבד, כך שצורת ז׳ורדן של A^3 היא $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. מצא את הפולינום האופייני ואת פולינום המינימלי של A, ורשום את צורת ז׳ורדן של A.

שאלה 5

(13 נקודות) א. יהי V מרחב אוניטרי ו- $T:V \to V$ טרנספורמציה נורמאלית המקיימת $T^{-1} = -T$. הוכח ש- T אוניטרית.

(12 נקודות) ב. תהי $q:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ פונקציה מוגדרת על ידי $q(x,y,z) = 4(xy + yz + zx)$.
מצא את המספר $M \in \mathbf{R}$ המינימאלי כך ש- $q(x,y,z) \le M(x^2 + y^2 + z^2)$,
לכל $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.