שימו לב: כל המרחבים במבחן זה הם ממימד סופי.
במבחן זה מדובר במכפלות הפנימיות הסטנדרטיות למרחבים המתאימים.

יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1 במרחב $V = M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, נגדיר טרנספורמציה לינארית S על ידי: $S(A) = \dfrac{A + A^t}{2}$, לכל $A \in M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$.

(8 נקודות) א. האם הטרנספורמציה S צמודה לעצמה? אוניטרית? נורמלית?

(8 נקודות) ב. מצא את הפולינום המינימלי ואת הפולינום האופייני של S.

(9 נקודות) ג. מצא בסיס אורתונורמלי B של V כך ש- $[S]_B$ מטריצה אלכסונית.

רמז: בדוק שהטרנספורמציה הלינארית $T(A) = A^t$ צמודה לעצמה.

שאלה 2 נתונה $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \lambda x_2^2 + 26x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$, $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$.

(13 נקודות) א. מצא את כל הערכים של הפרמטר $\lambda \in \mathbf{R}$ שעבורם התבנית הריבועית הממשית q חיובית למחצה. פתור את השאלה בעזרת שיטת Lagrange.

(12 נקודות) ב. יהי $\lambda = 5$. נסמן ב- $V = \left\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : q(x) = 0\right\}$.

בדוק ש- V מהווה תת-מרחב וקטורי של $\mathbf{R}^3$ ומצא בסיס של V.

שאלה 3 נתונה מטריצה $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

(15 נקודות) א. מצא את צורת ז'ורדן של A.

רמז: חשב את הפולינום האופייני בעזרת פיתוח דטרמיננטה לפי עמודה שלוש.

(7 נקודות) ב. הוכח שקיימת מטריצה הפיכה $P \in M_{4\times 4}^{\mathbf{R}}$ כך ש-

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & n & \frac{n(n-1)}{2} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & n & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \text{ לכל } n \geq 1.$$

(3 נקודות) ג. יהי $n \geq 1$. הוכח ש- A^n ו- A מטריצות דומות.

שאלה 4

(13 נקודות) א. תהי $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ קבוצה של מטריצות בלתי תלויות לינארית במרחב $M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$.

הוכח שהמטריצה $U = \left(tr(A_i^t \cdot A_j)\right)_{1\le i,j\le k}$ היא הפיכה.

(12 נקודות) ב. תהי $A \in M_{7\times 7}^{\mathbf{C}}$ מטריצה ריבועית מסדר 7 בעלת ערך עצמי יחיד $\lambda \in \mathbf{C}$.

נתון ש- $\rho(A-\lambda I)^2 = 1$ ו- $\rho(A-\lambda I) = 2$.

מצא את צורת ז'ורדן ואת הפולינום המינימלי של A.

שאלה 5

(13 נקודות) א. תהי $T : V \to V$ טרנספורמציה לינארית במרחב מכפלה פנימית.

נתון ש- $T^* = -T$. הוכח שלכל α ממשי, הטרנספורמציה $I - \alpha T$ היא הפיכה.

(12 נקודות) ב. תהי $q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ תבנית ריבועית מוגדרת על ידי: $q(x_1, x_2) = 8x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$.

הוכח ש- $\frac{1}{3} \le \|x\| \le \frac{1}{2}$ לכל וקטור $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ שמקיים את $q(x_1, x_2) = 1$.

הערה: הנורמה $\|x\|$ של הווקטור x מתייחסת למרחב $\mathbf{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

בהצלחה!