שימו לב: כל המרחבים במבחן זה הם ממימד סופי.
במבחן זה מדובר במכפלות הפנימיות הסטנדרטיות למרחבים המתאימים.

יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1

(13 נקודות) א. נגדיר פונקציה $f(\mathbf{x})=\dfrac{(x_1+2x_2+...+nx_n)^2}{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+...+x_n^{\,2}}$, לכל $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\neq\mathbf{0}$ ב- $\mathbf{R}^n$.

1. מצא סקלר $M>0$ מינימלי כך ש- $f(\mathbf{x})\leq M$, לכל $\mathbf{x}\neq 0$.
2. מצא וקטור $\mathbf{x}^*\neq 0$ כך ש- $f(\mathbf{x}^*)=M$.

(12 נקודות) ב. יהיו A ו- B מטריצות מרוכבות מסדר 7×7 בעלות אותו פולינום מינימאלי $(t-\lambda)^3$. נתון שלערך העצמי λ יש אותו ריבוב גיאומטרי r ב- A וב- B.

הוכח או הפרך: (1) אם $r=3$ אז A ו- B דומות.

(2) אם $r=4$ אז A ו- B דומות.

שאלה 2

(13 נקודות) א. תהי T טרנספורמציה לינארית במרחב אוניטרי V ממימד סופי. הוכח כי אם $TT^*=6T-8I$ אז T חיובית לחלוטין ו- $2\|v\|\leq\|T(v)\|\leq 4\|v\|$, לכל $v\in V$.

(12 נקודות) ב. נתונות שתי תבניות ריבועיות ממשיות $q_1=X^tAX$, $q_2=X^tBX$. מניחים ש- A,B מטריצות רגולאריות וסימטריות ב- $M_{2\times2}^{\mathbf{R}}$. הוכח כי לפחות אחת מהטענות הבאות נכונה:

1. A ו- B הן חופפות.
2. התבניות q_1,q_2 ניתנות ללכסון סימולטאני.

שאלה 3

יהיו $0\leq a,b\leq 1$ שני מספרים ממשיים כך ש- $a+b=1$.

(13 נקודות) א. הוכח שלכל שני וקטורים $\mathbf{x},\mathbf{y}$ ב- $\mathbf{R}^n$ מתקיים $\|a\mathbf{x}+b\mathbf{y}\|^2\leq a\|\mathbf{x}\|^2+b\|\mathbf{y}\|^2$.

רמז: הוכח כי לכל שני סקלרים u,v ממשיים מתקיים $(au+bv)^2\leq au^2+bv^2$.

(12 נקודות) ב. נתונה $Q:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ תבנית ריבועית חיובית לחלוטין.

1. הוכח שלכל שני וקטורים $\mathbf{x},\mathbf{y}$ ב- $\mathbf{R}^n$ מתקיים $Q(a\mathbf{x}+b\mathbf{y})\leq aQ(\mathbf{x})+bQ(\mathbf{y})$.
2. יהי $r>0$. נסמן $B_r=\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n:Q(\mathbf{x})<r^2\}$. הוכח שאם $\mathbf{x},\mathbf{y}\in B_r$ אז $a\mathbf{x}+b\mathbf{y}\in B_r$.

שאלה 4

יהי $M_{n\times n}^{\mathbf{F}}$ מרחב המטריצות מסדר $n\times n$, $n>1$, מעל שדה $\mathbf{F}$, ותהי $A\in M_{n\times n}^{\mathbf{F}}$. נגדיר טרנספורמציה לינארית $T: M_{n\times n}^{\mathbf{F}} \to M_{n\times n}^{\mathbf{F}}$ על ידי: $T(X)=AX$, לכל $X\in M_{n\times n}^{\mathbf{F}}$.

(11 נקודות) א. הוכח שלטרנספורמציה T ולמטריצה A יש אותו פולינום מינימאלי.
האם יש להם אותו פולינום אופייני? נמק.

(8 נקודות) ב. מצא את צורת ז׳ורדן של T במקרה ש- $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ והשדה $\mathbf{F}=\mathbf{R}$.

(6 נקודות) ג. מצא את צורת ז׳ורדן של T במקרה ש- $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ והשדה $\mathbf{F}$ מקיים $char\mathbf{F}=2$.

שאלה 5

(13 נקודות) א. תהי $T:V\to V$ טרנספורמציית היטל אורתוגונלי על תת-מרחב U,
ויהי W תת-מרחב של V. הוכח כי W הוא T-שמור אם ורק אם
$W=(W\cap U)\oplus(W\cap U^{\perp})$.

(12 נקודות) ב. תהי A מטריצה ממשית סימטרית. הוכח כי A^3 חופפת ל- A .

בהצלחה!