שימו לב: כל המרחבים במבחן זה הם ממימד סופי.
במבחן זה מדובר במכפלות הפנימיות הסטנדרטיות למרחבים המתאימים.

יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1

יהי $V = M_{n\times n}^{\mathbf{C}}$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, ותהי $P \in V$ מטריצה הפיכה. נגדיר טרנספורמציה לינארית $T_P : V \to V$ על-ידי: $T_P X = P^{-1}XP$, לכל $X \in V$.

(15 נקודות) א. הוכח ש- $(T_P)^* = T_{P^*}$.

(10 נקודות) ב. נתון ש- $n=2$ ו- $P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$. מצא את המטריצה המייצגת את $(T_P)^*$ בבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times 2}^{\mathbf{C}}$.

שאלה 2

נתונה מטריצה $M_{4\times 4}^{\mathbf{R}} \ni A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(8 נקודות) א. נניח ש- $a=2,\ b=c=d=0$. מצא את צורת ז'ורדן J של המטריצה A ומצא מטריצה הפיכה P המקיימת $P^{-1}AP = J$.

(8 נקודות) ב. נניח ש- $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$.
מצא את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימלי של A.

(9 נקודות) ג. מצא את כל צורות ז'ורדן האפשריות עבור A, כאשר $a\geq 0,\ b\geq 0,\ c>0,\ d>0$.
הערה: בסעיפים ב' ו- ג' התשובות תלויות ב- a,b,c,d.

שאלה 3

(13 נקודות) א. תהי $T:V \to V$ טרנספורמציה ליניארית נורמלית במרחב מכפלה פנימית ממימד סופי.
הוכח: (i) $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*$. (ii) $\operatorname{Im} T = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$. (iii) $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^*$.

(12 נקודות) ב. תהי $A \in M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$ מטריצה ממשית ללא ערכים עצמיים ויהי $p(x)$ פולינום כלשהו מעל $\mathbf{R}$. הוכח ש- $p(A)=0$ או $p(A)$ מטריצה הפיכה.
רמז: בדוק מקרים לפי האם $p(x)$ מתחלק בפולינום מינימלי של A.

שאלה 4

(13 נקודות) א. תהי $f:\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ תבנית על $\mathbf{R}^2$ הנתונה על-ידי:

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2))=x_1y_1+4x_2y_2+2x_1y_2+2x_2y_1.$$

הוכח ש-f תבנית בילינארית ומצא בסיס שבו f מיוצגת על-ידי מטריצה אלכסונית.

(12 נקודות) ב. יהי V מרחב ליניארי ממימד סופי מעל שדה $\mathbf{R}$, ותהי $T:V\to V$ טרנספורמציה ליניארית.

יהי W תת-מרחב T-שמור של V ו- T_W הצמצום של T ל-W.

האם הטענה הבאה נכונה? "אם T_W לא לכסינה, אז גם T לא לכסינה".

שאלה 5

(13 נקודות) א. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbf{C}$, $\dim V\geq 2$. הוכח שאם $q:V\to\mathbf{C}$ תבנית ריבועית,

אז קיים $v\neq 0$ כך ש- $q(v)=0$. האם תכונה זאת נכונה גם עבור תבנית ריבועית

$q:V\to\mathbf{R}$, כאשר V מרחב וקטורי מעל $\mathbf{R}$, $\dim V\geq 2$?

(12 נקודות) ב. מצא את צורת ז'ורדן J של המטריצה $A=\begin{pmatrix}5&-6&-6\\-1&4&2\\3&-6&-4\end{pmatrix}$.

בהצלחה!