שימו לב: כל המרחבים במבחן זה הם ממימד סופי.
במבחן זה מדובר במכפלות הפנימיות הסטנדרטיות למרחבים המתאימים.

יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1

(13 נקודות) א. תהי $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ קבוצה של מטריצות בלתי תלויות לינארית במרחב $M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$.
הוכח שהמטריצה $U = \left(tr(A_i^t \cdot A_j)\right)_{1\le i,j\le k}$ היא הפיכה.

(12 נקודות) ב. נתונות A ו- B מטריצות ממשיות סימטריות אשר הפולינום האופייני שלהן שווה ל- $P_A(t) = t^3 - t$ ו- $P_B(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$ בהתאמה.
1. מצא את כל המספרים השלמים $k \ge 1$ כך ש- A^k חופפת ל- B^k.
2. הוכח שלא קיים $k \ge 1$ שלם כך שהמטריצות A^k ו- B^k בעלות אותה צורה ז'יורדן.

שאלה 2

במרחב $M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית $(n>1)$, נגדיר טרנספורמציה לינארית T על ידי:
$T(A) = -A^t$, לכל $A \in M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$.

(7 נקודות) א. הוכח ש- T טרנספורמציה אוניטרית.
(6 נקודות) ב. מצא את הפולינום המינימלי של T.
(6 נקודות) ג. מצא את הפולינום האופייני של T.
(6 נקודות) ד. נתון ש- $trace(T) = -3$. מצא את צורת ז'יורדן של T.

שאלה 3

(10 נקודות) א. הוכח שאם A ו- B מטריצות חיוביות לחלוטין אז $A+B$ מטריצה הפיכה.

(15 נקודות) ב. תהי $A \in M_{3\times 3}^{\mathbf{R}}$. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:
1. אם A^2 לכסינה אז A לכסינה.
2. אם הפולינום האופייני של A^2 הוא $t(t-0.25)(t-1)$, אז A לכסינה.

שאלה 4

(13 נקודות) א. יהי $a \in \mathbf{R}$. נתון שהתבנית הריבועית הממשית

$q(x_1, x_2, x_3) = ax_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 5x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2$ שלילית למחצה.

מצא את a ומצא תת-מרחב $U \neq (0)$ של $\mathbf{R}^3$ כך ש- $q(u) = 0$, לכל $u \in U$.

(12 נקודות) ב. מצא את צורת ז׳יורדן של $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

שאלה 5

תהי $A \in M_{n\times n}^{\mathbf{C}}$ מטריצה ריבועית בעלת פולינום מינימלי ממעלה k .

(10 נקודות) א. מצא את הממד של $W = span\left\{I, A, A^2, A^3, ..., A^m, ...\right\}$.

(10 נקודות) ב. בדוק שאם A מטריצה הפיכה אז $A^{-1} \in W$.

(5 נקודות) ג. הוכח שאם $g(x)$ פולינום ו- $g(A)$ הפיכה , אז קיים פולינום $h(x)$ ממעלה קטנה או שווה ל- $(k-1)$ כך ש- $(g(A))^{-1} = h(A)$.

בהצלחה !