שימו לב: כל המרחבים במבחן זה הם ממימד סופי.
במבחן זה מדובר במכפלות הפנימיות הסטנדרטיות למרחבים המתאימים.

יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1

(12 נקודות) א. הוכח שאם $n>1$, אז ב- $M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$ קיימת מטריצה סימטרית שונה מאפס אשר אורתוגונלית לכל מטריצה אלכסונית.

(13 נקודות) ב. תהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית במרחב מכפלה פנימית.
נתון ש- $8I=(9I-T)T^*$. הוכח ש- T טרנספורמציה חיובית לחלוטין.
מצא את כל הערכים העצמיים האפשריים של T.

שאלה 2

תהי q התבנית הריבועית הממשית:

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4)=4x_1x_4-12x_2x_3 .$$

(7 נקודות) א. כתוב את התבנית הריבועית q כסכום של ריבועים לפי שיטת לגרנז'.

(6 נקודות) ב. מצא בסיס שבו המטריצה המייצגת את q היא אלכסונית.

(6 נקודות) ג. מצא תת-מרחב U של $\mathbf{R}^4$ ממימד גדול ביותר, כך ש- q חיובית לחלוטין על U.

(6 נקודות) ד. נסמן ב- $A=[q]_E$ את המטריצה של q לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^4$.
מצא את צורת ז'ורדן של A.

שאלה 3

תהיינה $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ו- $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(13 נקודות) א. האם קיים $m\geq 1$ שלם כך ש- A^m ו- B^m דומות?

(12 נקודות) ב. יהי $m\geq 1$ שלם. מצא את צורת ז'ורדן של A^m ושל B^m.

שאלה 4

(12 נקודות) א. יהי V מרחב אוניטרי ו- $T{:}V \to V$ טרנספורמציה נורמלית המקיימת $T^{-1} = -T$. הוכח ש- T אוניטרית.

(13 נקודות) ב. נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. מצא פולינום $P(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$ כך ש- $A^{-1} = P(A)$. האם בהכרח $d \neq 0$?

שאלה 5

(12 נקודות) א. יהיו l_1 ו- l_2 תבניות לינאריות על המרחב $\mathbf{R}^n$. נגדיר פונקציה $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ על ידי $f(x,y) = l_1(x) \cdot l_2(y)$, לכל $x = (x_1,...,x_n), y = (y_1,...,y_n)$ ב- $\mathbf{R}^n$.
הוכח כי f תבנית בילינארית בעלת דרגה קטנה או שווה ל- 1.

(13 נקודות) ב. 1. האם קיימת מטריצה ממשית ונורמלית עבורה הפולינום האופייני הוא $t(t-1)(t^2+1)$?

2. האם קיימת מטריצה ממשית עבורה הפולינום האופייני הוא $t(t-1)(t^2+1)$ ואילו הפולינום המינימלי הוא $t(t-1)$?

בהצלחה !