שימו לב: כל המרחבים במבחן זה הם ממימד סופי.
במבחן זה מדובר במכפלות הפנימיות הסטנדרטיות למרחבים המתאימים.

יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1

(12 נקודות) א. תהי $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

מצא את צורת ז'ורדן G של A ומצא מטריצה P כך ש- $P^{-1}AP = G$.

(13 נקודות) ב. תהי $V \subseteq M_{2\times 2}^{\mathbf{C}}$ קבוצת כל המטריצות ההרמטיות מסדר 2. ידוע ש- V מרחב לינארי מעל שדה המספרים הממשיים $F = \mathbf{R}$. (כלומר הפעולות הן: חיבור רגיל של מטריצות וכפל בסקלרים ממשים). בדוק שהמשוואה $q(A) = 2\det(A)$ מגדירה תבנית ריבועית על V. מצא את הדרגה ואת הסימנית של q.

שאלה 2

(13 נקודות) א. יהיו A ו- B מטריצות ממשיות סימטריות מסדר 4×4, שתיהן בעלות דטרמיננטה חיובית, וידוע כי לכל אחת מהן יש לפחות ערך עצמי חיובי אחד וערך עצמי שלילי אחד. הוכח ש- A ו- B חופפות.

(12 נקודות) ב. יהי V מרחב ליניארי ממימד 5 מעל שדה F, ותהי $T: V \to V$ טרנספורמציה לינארית הפיכה. האם הטענה הבאה נכונה?

"T^{-1} ניתנת להצגה על-ידי פולינום ב- T ממעלה 4 לכל היותר."

שאלה 3

(8 נקודות) א. מצא את כל המטריצות הנילפוטנטיות מסדר n מעל שדה $F = \mathbf{R}$ המקיימות את התנאי $A^t = A$.

(10 נקודות) ב. יהי F שדה כלשהו ויהיו $a, b \in F$. תהי $T(x_1, x_2) = (x_1 + ax_2, bx_2)$ טרנספורמציה לינארית מ- F^2 ל- F^2. מניחים ש- $a \neq 0$.

1. הוכח ש- T לכסינה אם ורק אם $b \neq 1$.
2. כמה תת-מרחבים T- שמורים יש? נמק!

(7 נקודות) ג. האם עבור כל שתי מטריצות לכסינות $A, B \in M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$ המכפלה AB לכסינה?

רמז: אפשר להשתמש סעיף ב'.

שאלה 4

(9 נקודות) א. יהי V מרחב אוניטרי עם מכפלה פנימית $(\ ,\ )$, ויהי $B=\{u_1,...,u_n\}$ בסיס של V.

הוכח כי לכל שני וקטורים $x=x_1u_1+...x_nu_n$ ו- $y=y_1u_1+...+y_nu_n$ מתקיים

$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$ אם ורק אם B בסיס אורתונורמלי.

(10 נקודות) ב. מצא במרחב- $\mathbf{R}_2[x]=\{a+bx : a,b\in\mathbf{R}\}$ מכפלה פנימית כך שהקבוצה

$B=\{u=1+2x, v=2+5x\}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbf{R}_2[x]$.

(6 נקודות) ג. תהי $P:\mathbf{R}_2[x]\to\mathbf{R}_2[x]$ ההטלה האורתוגונלית על $U=span\{1+2x\}$, ביחס

למכפלה פנימית שמצאת בסעיף ב'. יהי $E=\{1,x\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}_2[x]$.

מצא את הפולינום המינימלי של P. האם P טרנספורמציה נורמלית?

האם $[P]_E^{\ t}=[P]_E$?

שאלה 5

(10 נקודות) א. נתונה מטריצה מרוכבת $A=\begin{pmatrix} a & b+c \\ b-c & -a\end{pmatrix}$. מצא את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A.

(15 נקודות) ב. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי ו- $T:V\to V$ טרנספורמציה ליניארית

המקיימת $T^3=\frac{1}{2}\left(T+T^*\right)$.

1. הוכח ש- T נורמלית.
2. הוכח ש- T צמודה לעצמה.
3. נתון ש- $\det(2T)=-32$ ו- $trace(T)>0$.

מצא את הפולינום המינימלי ואת צורה ז'ורדן של T.

בהצלחה !