שימו לב: כל המרחבים במבחן זה הם ממימד סופי.
במבחן זה מדובר במכפלות הפנימיות הסטנדרטיות למרחבים המתאימים.

יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1

(13 נקודות) א. תהי $T: V \to V$ טרנספורמציית היטל אורתוגונלי על תת-מרחב U,
ויהי W תת-מרחב של V. הוכח כי אם W הוא T-שמור אז
$W = (W \cap U) \oplus (W \cap U^{\perp})$.

(12 נקודות) ב. תהי T טרנספורמציה לינארית במרחב אוניטרי V ממימד סופי.
1. הוכח כי אם $TT^* = 4T - 3I$, אז T חיובית לחלוטין.
2. נתון ש- $trace(T) = 7, \det(T) = 9$. מצא את הפולינום המינימלי ואת צורת ז'ורדן של T.

שאלה 2

תהי $g: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $g(x,y,z) = y^2 + 5z^2 + 4xy - 2yz - 4xz$ תבנית ריבועית ממשית.

(13 נקודות) א. האם קיים בסיס של $\mathbf{R}^3$ שבו המטריצה המייצגת של g היא $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

(12 נקודות) ב. מצא בסיס לתת-מרחב $W \subseteq \mathbf{R}^3$ ממימד מקסימאלי כך שיתקיים
$g(w) \ge 0$, לכל $w \in W$.

שאלה 3

(13 נקודות) א. תהי $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ טרנספורמציית ההיטל האורתוגונלי על המישור
$2x - y + z = 0$. מצא את כל תת-המרחבים ה- T-שמורים של $\mathbf{R}^3$,
את פולינום המינימאלי של T ואת צורת ז'ורדן של T.

(12 נקודות) ב. יהיו $A_1, \ldots, A_n; B_1, \ldots, B_n$ מטריצות ששייכות למרחב $M_{k\times k}^{\mathbf{R}}$. מניחים ש-
$tr\left(A_j{}^t B_i\right) = 0$ לכל $1 \le i \ne j \le n$ ו- $tr\left(A_i{}^t B_i\right) \ne 0$ לכל $1 \le i \le n$.
הוכח שהקבוצה $\{A_1, \ldots, A_n\}$ בלתי תלויה לינארית.

שאלה 4

נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in M_{2\times 2}^{\mathbf{C}}$.

(10 נקודות) א. בדוק ש- A נורמלית, ומצא את הפירוק $A=\sum_k \lambda_k P_k$, כאשר P_i הן המטריצות (המייצגות בבסיס הסטנדרטי) של ההטלות האורתוגונליות שמופיעות בפירוק הספקטראלי של T_A .

(10 נקודות) ב. נגדיר טרנספורמציה לינארית $S: M_{2\times 2}^{\mathbf{C}} \to M_{2\times 2}^{\mathbf{C}}$ על ידי $S(X)=AX$, לכל $X\in M_{2\times 2}^{\mathbf{C}}$.
מצא את הפולינום המינימלי, את הפולינום האופייני ואת צורת ז'ורדן של S .

(5 נקודות) ג. הוכח שקיים בסיס אורתונורמלי של $M_{2\times 2}^{\mathbf{C}}$ מורכב מווקטורים עצמיים של S .

שאלה 5

(12 נקודות) א. תהי $q:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ פונקציה מוגדרת על ידי $q(x,y,z)=4(xy+yz+zx)$.
מצא מספר $m\in\mathbf{R}$ מקסימאלי כך ש- $q(x,y,z)\ge m(x^2+y^2+z^2)$, לכל $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$.

(13 נקודות) ב. יהי V מרחב אוניטרי ממימד סופי, ותהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית אי-שלילית.
מניחים ש- $T^{2005}=I$. האם $T=I$?

בהצלחה !