שימו לב – כל המרחבים במבחן זה הם ממימד סופי.
יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1

יהי $M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, ותהי $A\in M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$. נגדיר טרנספורמציה ליניארית $S_A : M_{n\times n}^{\mathbf{R}} \to M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$ על ידי: $S_A(X) = X\cdot A$, לכל $X\in M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$.

(3 נקודות) א. בדוק ש- $\left(S_A\right)^m = S_{\left(A^m\right)}$, לכל $m\ge 1$ שלם.

(11 נקודות) ב. בדוק שאם A מטריצה סימטרית , אז S_A טרנספורמציה צמודה לעצמה.

(11 נקודות) ג. נניח ש- $n=2$ ו- $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. מצא את הפולינום המינימלי ואת צורת ז'ורדן של המטריצה A . האם S_A טרנספורמציה ליניארית לכסינה ?

שאלה 2

(13 נקודות) א. יהי $\mathbf{R}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
יהי $U=\left\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{R}^4 \;\middle|\; x_1+x_2+x_4=0\right\}$ תת מרחב של $\mathbf{R}^4$.
יהי $v=(2,0,0,1)\in\mathbf{R}^4$. מצא וקטור $u_0\in U$ כך ש- $\|u_0-v\|<\|u-v\|$ לכל וקטור $u_0\ne u\in U$.

(12 נקודות) ב. תהי $q(x)=q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3$ תבנית ריבועית מעל $\mathbf{R}^3$.

האם קיים בסיס של $\mathbf{R}^3$ שבו המטריצה שמייצגת את q היא $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & -2\\ -1 & -2 & -1\end{pmatrix}$?

שאלה 3

(13 נקודות) א. נתונה $A=\begin{pmatrix}14 & 13\\ 13 & 14\end{pmatrix}$. מצא מטריצה סימטרית $B\in M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$ כך ש- $B^3=A$.

(12 נקודות) ב. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית צמודה לעצמה. האם בהכרח קיימת העתקה לינארית צמודה לעצמה $S:V\to V$ כך ש- $S^3=T$?

שאלה 4

(13 נקודות) א. יהי $V = \mathbf{C}^n$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

תהי $T: V \to V$ פונקציה לינארית שמקיימת $T^2 - 7T + 6I = 0$.

הוכח שאם T נורמלית אז T צמודה לעצמה.

(12 נקודות) ב. תהי $A \in M_{3\times 3}^{\mathbf{R}}$ מטריצה. נתון ש- $tr(A) = -3$ ו- $(A-I)^5(A+2I)^7 = 0$.

ידוע שהמטריצה A^2 לא לכסינה מעל $\mathbf{R}$. מצא את צורת ז'ורדן של A.

שאלה 5

תהי $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le 4} \in M_{4\times 4}^{\mathbf{R}}$, $A = \begin{pmatrix} a & -a & a & -a \\ -a & a & a & -a \\ a & a & a & a \\ -a & -a & a & a \end{pmatrix}$.

נסמן ב- (u,v) את המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbf{R}^4$.

(5 נקודות) א. בדוק שרק עבור $|a| = \frac{1}{2}$ מתקיים: $(Ax, Ax) = (x, x)$, לכל $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$.

(10 נקודות) ב. נתון ש- $a = \frac{1}{2}$. מצא את צורת ז'ורדן של A.

(10 נקודות) ג. נתון ש- $a = \frac{1}{2}$. נגדיר תבנית ריבועית $q: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ על ידי:

$q(x) = x^t \cdot A \cdot x$, לכל $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$. מצא את הסימנית ואת הדרגה של q.