שימו לב – כל המרחבים במבחן זה הם ממימד סופי.
יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1

יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי. יהיו $w_1, w_2 \in V$ וקטורים המקיימים :
$\|w_1\| = \|w_2\| = 1$, $(w_1, w_2) = 0$.

נגדיר פונקציה $T: V \to V$ לפי : $Tv = v - 2(v, w_1)w_1 - 2(v, w_2)w_2,\ v \in V$.

(13 נקודות) א. הוכח כי T טרנספורמציה ליניארית, צמודה לעצמה ואוניטרית.

(12 נקודות) ב. בדוק האם T אי שלילית.

שאלה 2

(13 נקודות) א. נתונה תבנית בילינארית $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ כך שהדרגה של f שווה ל- 1.
הוכח ש- f ניתנת להצגה כמכפלה של שתי תבניות לינאריות :

$$f(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j y_j\right).$$

(12 נקודות) ב. יהיו A ו- B מטריצות מרוכבות מסדר $n \times n$. אם קיים פולינום $q(t)$ המקיים
$q(A) = 0$ אבל $q(B) \neq 0$, אז A ו- B אינן דומות.

שאלה 3

נגדיר מטריצה $A = \left(a_{ij}\right)_{1 \le i, j \le n} \in M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$ על ידי : $a_{ij} = \begin{cases} a, & i = j \\ b, & i \neq j \end{cases}$. מניחים ש- $n \ge 2$ ו- $a, b > 0$.

נגדיר פונקציה $q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ על ידי : $q(x) = q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$.

(13 נקודות) א. בדוק ש- $q(x) > 0$ לכל וקטור $x \neq 0$ אם ורק אם $b < a$.

(12 נקודות) ב. האם לכל וקטור $x \in \mathbf{R}^n$ מתקיים : $\left(a - b\right)\|x\|^2 \le q(x) \le \left(a + (n-1)b\right)\|x\|^2$?

רמז : אפשר לחשב את הפולינום האופייני של A.

שאלה 4

(13 נקודות) א. יהי V מרחב ליניארי מעל שדה F, ותהי $T:V \to V$ טרנספורמציה ליניארית.
ידוע כי כל תת-מרחב של V הוא T-שמור. הוכח שקיים $\alpha \in F$ כך ש- $T = \alpha I$,
(כלומר הוכח ש- T טרנספורמציה סקלרית).

(12 נקודות) ב. תהי A מטריצה סימטרית ממשית מסדר $n \times n$ כך ש- $a_{ii} > 0$ עבור i מסוים.
הוכח שלמטריצה A יש ערך עצמי חיובי. רמז: בדוק ש- $a_{ii} = e_i^t \cdot A \cdot e_i$.

שאלה 5

(13 נקודות) א. תהי A מטריצה ממשית מסדר $n \times n$ המקיימת $\rho(A) = 1,\ tr(A) = 0$.
מצא את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימלי שלה. מצא את צורת ז'ורדן של A.

(12 נקודות) ב. יהי S העתקה לינארית במרחב מכפלה פנימית V מעל **C**.
הוכח ש- S נורמלית אם ורק אם (שני כיוונים) לכל $v \in V$ מתקיים $\|Sv\|^2 = \|S^*v\|^2$.