שימו לב – כל המרחבים במבחן זה הם ממימד סופי.
יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1

יהי $V = M_{n\times n}^{\mathbf{C}}$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, ותהי $P \in V$ מטריצה הפיכה.

נגדיר טרנספורמציה לינארית $T_P : M_{n\times n}^{\mathbf{C}} \to M_{n\times n}^{\mathbf{C}}$ על-ידי: $T_P\left(X\right) = P^{-1}XP$ לכל $X \in V$.

(13 נקודות) א. הוכח ש- $(T_P)^* = T_{P^*}$.

(12 נקודות) ב. נניח ש- $n = 2$ ו- $P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$. בדוק ש- $P^2 + 2I = 0$ ומצא את הפולינום המינימלי של T_P ואת צורת ז'ורדן של T_P. רמז: אין צורך למצוא את המטריצה המייצגת את T_P בבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times 2}^{\mathbf{C}}$.

שאלה 2

(13 נקודות) א. הוכח שהמטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ נורמלית, ומצא את הפרוק הספקטרלי $A = \sum_k \lambda_k P_k$, כאשר P_k הן ההטלות האורתוגונליות המופיעות בפירוק הספקטרלי של T_A.

(12 נקודות) ב. מצא את כל הערכים הממשיים של λ שעבורם התבנית הריבועית $q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$ חיובית לחלוטין.

שאלה 3

יהי $V = M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$ ותהי $f: V\times V \to \mathbf{R}$ מוגדרת לפי: $f(A,B) = tr(A^tMB)$, לכל $A, B \in V$.

(13 נקודות) א. בדוק ש- f תבנית סימטרית אם ורק אם M מטריצה סימטרית.

(12 נקודות) ב. נתון ש- $n = 2$ ו- $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. מצא את $[f]_E$ כאשר E הבסיס הסטנדרטי של $V = M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$.
2. מצא הצגה של f כסכום של תבנית בילינארית סימטרית ותבנית בילינארית אנטיסימטרית.

שאלה 4

(13 נקודות) א. תהי T טרנספורמציה לינארית במרחב V ממימד סופי. יהי W תת-מרחב T-שמור של V ויהי T_W הצמצום של T ל-W. הוכח כי אם T לכסינה אז T_W לכסינה.

(12 נקודות) ב. הוכח או הפרך את הטענה הבאה: "במרחב $\mathbf{R}_5[x]$ קיימת מכפלה פנימית שלגביה הקבוצה $\left\{1+x, x+x^2, x^2+x^3, x^3+x^4, x^4\right\}$ אורתוגונלית."

שאלה 5

(13 נקודות) א. תהי A מטריצה ריבועית מסדר 7 בעלת ערך עצמי יחיד $\lambda \in \mathbf{C}$. נתון ש-$\rho(A-\lambda I)^2 = 1$ ו- $\rho(A-\lambda I) = 2$. מצא את צורת ז'ורדן ואת הפולינום המינימאלי של A.

(12 נקודות) ב. הוכח שאם מטריצה $A \in M_{n\times n}^{\mathbf{C}}$ צמודה לעצמה, אז קיים מספר ממשי α כך ש-$\alpha I + A$ היא מטריצה חיובית.