מבחן פתור

בס"ד -1- אוני' בר-אילן, סמסטר ב' תשנ"ה
מועד א'

(88-110-04) אלגברה לינארית \ ד"ר רון עדין

בחינת סוף סמסטר ב' (מועד א')

הודעת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי עזר אסורים או יתפס בהעתקה יענש בחומרה עד כדי הרחקתו מהאוניברסיטה.

- זמן הבחינה: שעתיים וחצי.
- אין להשתמש בחומר-עזר, פרט למחשב-כיס פשוט.
- יש לפתור 4 מתוך 6 השאלות. אם פתרת יותר מארבע שאלות, נא סמן ארבע מהן לבדיקה - אחרת תיבדקנה ארבע הראשונות.
- נא לכלול את כל החישובים במחברת הבחינה. קטעי-טיוטה שאינם מיועדים לבדיקה אפשר למחוק בקו; מומלץ להשתמש בצד אחד של הדף לגרסה סופית "נקיה", ובצד השני לטיוטה.
- ניקוד מלא יינתן לתשובה הכוללת את כל ההסברים והחישובים הנחוצים.

בהצלחה!

שאלות המבחן

① א. הגדר: מטריצה ניתנת ללכסון.

ב. האם המטריצה A הבאה ← ניתנת ללכסון מעל $\mathbb{R}$? מעל $\mathbb{C}$? נמק תשובתיך.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ג. תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{3\times3}$ מטריצות מתחלפות $(AB = BA)$. נניח ש-A דומה למטריצה ← $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. הוכח: B ניתנת ללכסון.

② תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

א. חשב את $\mathrm{adj}(A)$.

ב. חשב את $\det(A)$ בשני דרכים שונות, מהן אחת באמצעות סעיף א'.

ג. חשב את $\mathrm{adj}(A^{-1})$ בכל דרך שתבחר (אין הכרח למצוא את A^{-1}).

③ א. הגדר: פונקציונל לינארי, בסיס אורתונורמלי.

ב. יהי $f: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ הפונקציונל הלינארי המוגדר ע"י:

$$f(x,y,z) = x + 2y - iz$$

רשום בסיס לתת-המרחב $W := \ker(f)$ של $\mathbb{C}^3$.

ג. מצא בסיס אורתונורמלי ל-W הנ"ל.

④ א. הגדר: סימן של תמורה.

ב. תהי

$$D := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

הוכח כי

$$D = \prod_{i<j} (x_j - x_i).$$

ג. נסמן:

$$D_1 := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix}$$

הוכח כי

$$D_1 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) D.$$

⑤ א. הגדר: ערך עצמי, מרחב עצמי.

ב. תהי $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

מצא את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של A.

ג. רשום במפורש את כל איברי המטריצה A^{1000}.

⑥ א. הגדר: אופרטור נורמלי, הרמיטי, אנטי-הרמיטי.

ב. הוכח שכל אופרטור T במרחב מכפלה פנימית ניתן לכתיבה באופן יחיד בצורה: $T = A + B$, כאשר A הרמיטי ואילו B אנטי-הרמיטי.

ג. הוכח ש-T נורמלי אמ"מ A, B הנ"ל מתחלפים.

= אלג' לינארית (ד"ר עזין), ס"מ מ"א תשנ"ה. פתרון: בועז צבאן =

① ב. דרך א. שים לב ש $(A^*=)A^t=-A$, כלומר A אנטי-סימטרית.

אם כן, $A^*=-A$, לכן A נורמלית ולכן לכסינה מעל $\mathbb{C}$. ☑

מעל $\mathbb{R}$: $A^t=-A$. נניח בשלילה ש A לכסינה. אזי באלכסון יופיעו הע"ע של A. נראה שאם λ ע"ע של A, אז $0=\lambda$:

כרגיל, יהי v ו"ע המתאים ל λ. אזי $\lambda<v,v>=<\lambda v,v>=<Av,v>=<v,A^tv>\overset{A^t=-A}{=}<v,-Av>=<v,-\lambda v>=-\lambda<v,v>$, לכן $2\lambda<v,v>=0$.

v ו"ע, לכן $0\neq v$ ולכן $<v,v>\neq 0$ לכן, $2\lambda=0$ ולכן $\lambda=0$ ($char(\mathbb{R})=0$...). יופי. לכן, $A\sim\begin{pmatrix}0&&0\\&0&\\0&&0\end{pmatrix}$, כלומר יש P כך

ש $A=P^{-1}\theta P=\theta$. ↯ (אנו רואים מעיניים ש $A\neq\theta$!). ☑ [אגב, 0 הוא אכן ע"ע כי $A^t=-A$, לכן $|A|=0$ (3 הוא מס' אי-זוגי!)]

דרך ב. נמצא את הע"ע של A מעל $\mathbb{C}$: $|A-\lambda I|\overset{\text{פ}}{=}-\lambda(\lambda^2+9)$, לכן הע"ע הם $0,3i,-3i$. הם שונים זמ"ז, לכן A לכסינה מעל $\mathbb{C}$ (כי לע"ע שונים מתאימים ו"ע בת"ל, ולכן יש בסיס המורכב מו"ע של A, ולכן A לכסינה (משפט)). ☑

מעל $\mathbb{R}$: הע"ע מעל $\mathbb{R}$ הם שורשי $|A-\lambda I|=-\lambda(\lambda^2+9)$ מעל $\mathbb{R}$. לכן רק 0 הוא ע"ע מעל $\mathbb{R}$. כאן אפשר להמשיך כמו בדרך א', אבל נמשיך בדרך ה"טכנית": נראה ש $\dim M_0<3$ ולכן אין בסיס המורכב מו"ע של A.

$$A-0I=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&0&-2\\-2&2&0\end{pmatrix}\longrightarrow\dots\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow(x,y,z)=t(-2,-2,1)\quad(t\in\mathbb{R})$$

לכן, $\dim M_0=1<3$. ☑

ג. דרך א. תהי P כך ש $A=PDP^{-1}$ ($D=\begin{pmatrix}1&&0\\&2&\\0&&3\end{pmatrix}$). נסמן $T=P^{-1}BP$, אזי $B=PTP^{-1}$. כעת,

$$P(DT)P^{-1}=PDP^{-1}PTP^{-1}=AB=BA=PTP^{-1}PDP^{-1}=P(TD)P^{-1}$$

לכן, $DT=TD$. נכתוב $T=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$. $T=\begin{pmatrix}a&&0\\&e&\\0&&i\end{pmatrix}\Leftarrow h=g=d=b=c=f=0\overset{\text{פ}}{\Longleftarrow}\begin{pmatrix}a&2b&3c\\d&2e&3f\\g&2h&3i\end{pmatrix}=DT=DT=\begin{pmatrix}a&b&c\\2d&2e&2f\\3g&3h&3i\end{pmatrix}$

כלומר T אלכסונית. אבל מהג' T, T דומה ל B, לכן B לכסינה.

דרך ב. A דומה למטריצה $\begin{pmatrix}1&&0\\&2&\\0&&3\end{pmatrix}$, לכן יש לה ע"ע 1,2,3. לכל $\lambda\in\{1,2,3\}$, $A|M_\lambda:M_\lambda\to M_\lambda$ (אנו מזהים את A עם ההעתקה T_A המוג' ע"י כפל ב A, כלומר $[T_A]_S=A$), כמו שראינו בתרגול. כעת $AB=BA$, לכן $B|M_\lambda:M_\lambda\to M_\lambda$ (*) (גם את זה ראינו באותו תרגול! עכ"פ ההוכחה של זאת אינה קלה). כיון שכל λ הוא בריבוי 1 (הע"ע שונים זמ"ז), $\dim M_\lambda=1$,

יהי $0\neq v\in M_\lambda$, אזי $M_\lambda=span\{v\}$. מ(*), $Bv\in M_\lambda$, לכן יש $\alpha\in\mathbb{R}$ כך ש $Bv=\alpha v$. לכן v ו"ע של B.

לסיכום, קיבלנו $v_1\in M_1$, $v_2\in M_2$, $v_3\in M_3$ שהם ו"ע של B. v_1,v_2,v_3 בת"ל, כי הם ו"ע השייכים לע"ע שונים זמ"ז של A.

(M_λ הוא אוסף הו"ע של A השייכים לע"ע λ). כלומר יש בסיס למרחב המורכב מו"ע של B. לכן B לכסינה.

② א. חישוב טכני.

ב. מחשבים $A\cdot adj(A)$ ומקבלים את $|A|$ באלכסון (עשינו בתרגול). למעשה, מספיק לחשב את $[A\,adjA]_{11}$, אולם זו בדיקה טובה עבור א', לחשב את שאר הרכיבים. ☑
דרך נוספת: חישוב ישירות $det(A)$, או בפיתוח שורה/עמודה כלשהי, כאשר אפשר להיעזר - אם רוצים - בתוצאות ביניים מ-א'. ☑

ג. לכל מטריצה B, $B\cdot adj B=|B|I$. בפרט עבור $B=A^{-1}$, $A^{-1}\cdot adj A^{-1}=|A^{-1}|I$. נכפיל משמאל ב A ונקבל $adj(A^{-1})=|A^{-1}|A=\frac{1}{|A|}A$. A נתונה ואת $|A|$ מצאנו ב-ב'. לכן החישוב קל.

③ ב. $\ker f=\{(x,y,z): x+2y-iz=0\}$. נסמן $z=s$, $y=t$. $x+2y-iz=0 \longleftrightarrow x=-2y+iz=-2t+is$. לכן, $(x,y,z)=(-2t+is,t,s)$ $(t,s\in\mathbb{C})$. כלומר, $\ker(f)=\{t(-2,1,0)+s(i,0,1): t,s\in\mathbb{C}\}=$

$$=\mathrm{Span}\{(-2,1,0),(i,0,1)\}.$$

קל לראות ש $(i,0,1)$, $(-2,1,0)$ בת"ל ולכן מהווים בסיס ל $\ker(f)$. ☑

ג. מפעילים תהליך גרם-שמידט על הבסיס שמצאנו. $\tilde{v}_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)$

$$v_2'=v_2-\langle v_2,\tilde{v}_1\rangle\tilde{v}_1=(i,0,1)-\frac{1}{\sqrt{5}}(-2i)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)=\frac{1}{5}(i,2i,5)$$

$$\tilde{v}_2=\frac{v_2'}{\|v_2'\|}=\sqrt{\frac{5}{6}}\cdot\frac{1}{5}(i,2i,5)=\frac{1}{\sqrt{30}}(i,2i,5)$$

לכן, $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0),\frac{1}{\sqrt{30}}(i,2i,5)\}$ בא"נ עבור $\ker(f)$. //

④ ב. בתרגיל ראינו עבור 3x3 (מטריצת ונדרמונדה!). הפתרון דומה עבור 4x4.

ג. נפתח את D_1 לפי השורה הרביעית:

~~$D_1=-x_1^4\underbrace{\begin{vmatrix}1&1&1\\x_2&x_3&x_4\\x_2^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix}}_{|A|}+x_2^4\underbrace{\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_3&x_4\\x_1^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix}}_{|B|}-x_3^4\underbrace{\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_4\\x_1^2&x_2^2&x_4^2\end{vmatrix}}_{|C|}+x_4^4\underbrace{\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\x_1^2&x_2^2&x_3^2\end{vmatrix}}_{|E|}=$~~

~~$=x_1(-x_1^3|A|)+x_2(x_2^3|B|)+x_3(-x_3^3|C|)+x_4(x_4^3|E|)=?$~~ מסובך

נוכיח באינדוקציה, לכל $2\le n$, ש $(a_1+\dots+a_n)\begin{vmatrix}1&\cdots&1\\a_1&&a_n\\\vdots&&\vdots\\a_1^{n+1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&&\vdots\\a_1^n&\cdots&a_n^n\end{vmatrix}$.

$\underline{n=2}$ $(a+b)\begin{vmatrix}1&1\\a&b\end{vmatrix}=(a+b)(b-a)=b^2-a^2$, ואכן $\begin{vmatrix}1&1\\a^2&b^2\end{vmatrix}=b^2-a^2$.

נניח נכונות עבור n, ונוכיח עבור $\underline{n+1}$. נסתכל לדוג' ברכיב הראשון של פיתוח אגף שמאל לפי השורה האחרונה

$$(a_1+\dots+a_n)(-1)^{n+1}a_1^{n-1}\underbrace{\begin{vmatrix}1&\cdots&1\\a_2&&a_n\\\vdots&&\vdots\\a_2^{n-2}&\cdots&a_n^{n-2}\end{vmatrix}}_{A}=(-1)^{n+1}a_1^n|A|+(-1)^{n+1}\underbrace{(a_2+\dots+a_n)|A|}_{\text{כאן אפשר להפעיל את הנחת האינדוקציה}}=$$

$$=(-1)^{n+1}a_1^n|A|+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}1&\cdots&1\\a_2&&a_n\\\vdots&&\vdots\\a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

?

④

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_4 - aR_3 \\ R_3 - aR_2}}{\underset{R_2 - aR_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix} \overset{\text{פיתוח לפי עמודה ראשונה}}{=} \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix}$$

הוצאת: I מעמודה $(b-a)$, II מעמודה $(c-a)$, III " $(d-a)$

$$= \overbrace{(b-a)(c-a)(d-a)}^{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} \overset{\text{נפעיל שוב אותו תהליך}}{\underset{\substack{R_3 - bR_2 \\ R_2 - bR_1}}{=}} \Delta \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c(c-b) & d(d-b) \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta \begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c(c-b) & d(d-b) \end{vmatrix} = \Delta (c-b)(d-b) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix}}_{(d-c)} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b) \cdot (d-b)(d-c). \boxtimes$$

הוצאתי: I מעמודה $c-b$, II " $d-b$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \overset{R_4 - a^2R_3}{\underset{\substack{R_3 - aR_2 \\ R_2 - aR_1}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (b-a) & (c-a) & (d-a) \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}}_{\hat{D}}$$

פיתוח לפי עמודה I והוצאת גורמים מהעמודות

$$\hat{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^3 + b^2a & c^3 + c^2a & d^3 + d^2a \end{vmatrix} \overset{\text{לינאריות שורות}}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}}_{\substack{R_3 - b^2R_2 \\ R_2 - bR_1}} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2a & c^2a & d^2a \end{vmatrix}}_{\text{נוציא } a \text{ משורה III}} =$$

של דטרמיננטה (שורות מתפרקות?)

(נפעיל את אותו תהליך)

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c(c^2-b^2) & d(d^2-b^2) \end{vmatrix}}_{\tilde{D}} + a \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}}_{(c-b)(d-b)(d-c);\ \text{חישבנו ב (ב)}}$$

$$\tilde{D} = \begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c(c^2-b^2) & d(d^2-b^2) \end{vmatrix} = (c-b)(d-b) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c(c+b) & d(d+b) \end{vmatrix}}_{d(d+b)-c(c+b)} = (c-b)(d-b)(d-c)(b+c+d)$$

הוצאתי: I מעמודה $c-b$, II " $d-b$

$$\Rightarrow \hat{D} = \tilde{D} + a(c-b)(d-b)(d-c) = (c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$$

$$\Rightarrow \det = (b-a)(c-a)(d-a)\hat{D} = (a+b+c+d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c). \,//$$

הערה: שאלה זו היא, לדעתי, הקשה ביותר במבחן, לכן גם אם יודעים את ה"טריק" של חישוב הדטרמיננטות, עדיין נשארים חישובים רבים. עצה שימושית: אם "נתקעתם" בשאלה יותר מחצי שעה, עיברו לשאלה אחרת.

⑤ ב. $|A-\lambda I| = \lambda^2-3i\lambda-2$, לכן השורשים הם $\frac{3i \pm \overset{i}{\sqrt{-9+8}}}{2} \begin{smallmatrix}\nearrow 2i\\ \searrow i\end{smallmatrix}$ והם הע"ע של A.

ו"ע. $\lambda = 2i$:

$$(A-2iI) = \begin{pmatrix}-2i & 1\\ 2 & i\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+iR_2} \begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & i\end{pmatrix} \Rightarrow (x,y)=t(-\tfrac{i}{2},1) \quad (t\in\mathbb{C})$$

כלומר $M_{2i} = Span\{(-\frac{i}{2},1)\}$.

$\lambda = i$:

$$(A-iI) = \begin{pmatrix}-i & 1\\ 2 & 2i\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2iR_1} \begin{pmatrix}-i & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow (x,y)=t(-i,1) \quad (t\in C)$$

כלומר $M_i = Span\{(-i,1)\}$.

ג. נגדיר $P=\begin{pmatrix}-\frac{i}{2} & -i\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, אז: $P^{-1} = \frac{1}{|P|}\begin{pmatrix}1 & i\\ -1 & -\frac{i}{2}\end{pmatrix}$ לפי משפט, $P^{-1}AP = \underbrace{\begin{pmatrix}2i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}}_{D}$ (כדאי לבדוק ישירות, כדי לוודא שאין טעות חישוב).

$$\overset{\shortparallel}{(-2i)}\begin{pmatrix}1 & i\\ -1 & -\frac{i}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2i & 2\\ 2i & -1\end{pmatrix}$$

לכן, $PDP^{-1}=A \Rightarrow$

$$A^{1000} = PD^{1000}P^{-1} = \begin{pmatrix}-\frac{i}{2} & -i\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overset{2^{1000}}{\overset{\shortparallel}{(2i)^{1000}}} & 0\\ 0 & \underset{1}{\underset{\shortparallel}{i^{1000}}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2i & 2\\ 2i & -1\end{pmatrix}$$

נסמן $d=2^{1000}$

$$= \begin{pmatrix}-\frac{i}{2}d & -i\\ d & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2i & 2\\ 2i & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-d & i-id\\ 2i-2id & 2d-1\end{pmatrix}. \square$$

$(i^{1000}=(i^4)^{250}=1 \Leftarrow i^4=1 \Leftarrow i^2=-1.)$

⑥ פתרנו בתרגול. נחזור על הפתרון:

$A^*=A$
$B^*=-B$

ב. אינטואיציה: ננסה לבטא את A,B כנדרש. אזי: $T=A+B$, לכן $T^*=(A+B)^*=A^*+B^*=A-B$. לכן, $T+T^*=2A$, כלומר $A=\frac{T+T^*}{2}$ וכן $T-T^*=2B$, כלומר $B=\frac{T-T^*}{2}$.

ועכשיו להוכחה: נגדיר $A=\frac{T+T^*}{2}$, $B=\frac{T-T^*}{2}$. קל לראות שמתקיים כל הנדרש: $T=A+B$, $A^*=A$, $B^*=-B$.

יחידות: נובעת מהאינטואיציה (בכל הצגה כזאת חייב להתקיים $A=\frac{T+T^*}{2}$; $B=\frac{T-T^*}{2}$). //

ג. מראים ישירות ש $(A+B)(A+B)^*=(A+B)^*(A+B) \Leftrightarrow AB=BA$. //

$$\begin{array}{cc} (A+B)(A+B)^* & (A+B)^*(A+B)\\ \shortparallel & \shortparallel\\ (A+B)(A^*+B^*) & (A^*+B^*)(A+B)\\ \shortparallel & \shortparallel\\ (A+B)(A-B) & (A-B)(A+B)\\ \shortparallel & \shortparallel\\ A^2-AB+BA-B^2 & A^2+AB-BA-B^2 \end{array}$$

— תם ונשלם —