בס"ד

בחינה בקורס **אלגברה לינארית 2** (88-135-05/08) – מועד ב׳

אוניברסיטת בר אילן, יום א׳, כ״ח אדר ב׳ תשע״ד (30.3.14 למ׳)

מרצים: בוריס קוניאבסקי ונתן קלר.

מתרגלים: ארז שיינר, איתמר שטיין ויובל חצ׳טריאן.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

הנחיות

א. בבחינה שני חלקים. בכל חלק יש לענות על 2 שאלות מתוך 3. כמו כן, ניתן לענות על שאלת הבונוס.

ב. השתמשו במחברת הבחינה לטיוטה, ולאחר שמצאתם פתרון מספק, כתבו אותו בצורה מסודרת בגוף הבחינה, במקום הפנוי המצוי לאחר השאלה. אם יש צורך במקום נוסף עבור התשובה, אפשר להמשיכה בגב אותו דף.

ג. הקיפו בעיגול, בטבלה הבאה, את מספרי השאלות שעליהן עניתם.

השאלות שבחרתי (להקיף בעיגול)	**ניקוד** (לשימוש הבודקים)
1	/35
2	/35
3	/35
4	/15
5	/15
6	/15
7 (בונוס)	/5
סה״כ	/105

שאלות הבחינה מופיעות בעמודים הבאים.

הבהרות. גם אם הדבר לא מצויין במפורש בשאלות:

א. כל המרחבים הוקטוריים בבחינה הם ממימד סופי.

ב. עליכם לנמק את כל תשובותיכם.

בהצלחה!

<u>חלק א'</u>

בחלק זה, עליכם לענות על שתיים מתוך השאלות 1-3. משקל כל שאלה 35 נקודות.

שאלה 1

יהי V המרחב הוקטורי של מטריצות 2*2 מעל הממשיים. נגדיר על V מכפלה פנימית בצורה הבאה: $< A,B > = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$.

א. (5 נק') הוכיחו כי זו אכן מכפלה פנימית.

ב. (10 נק') עבור המטריצות $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, מצאו בסיס אורתונורמלי למרחב $U = span(A_1, A_2)$.

ג. (10 נק') מצאו בסיס למרחב הניצב $U^{\perp}$.

ד. (10 נק') מצאו את ההטלה של $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ על U.

שאלה 2

תהי A מטריצה ריבועית מעל הממשיים, שהפולינום האפייני שלה הוא $p_A(x) = x^3(x^2+4)$ והדרגה שלה היא 2.

א. (9 נקי) האם A לכסינה מעל הממשיים?

ב. (9 נקי) האם A לכסינה מעל המרוכבים?

ג. (8 נקי) חשבו את העקבה $tr(A)$.

ד. (9 נקי) חשבו את הפולינום המינימלי $m_A(x)$.

שאלה 3

תהי A מטריצה נורמלית מעל הממשיים.

א. (20 נק') הוכיחו כי אם הפולינום האפייני של A מתפרק לגורמים ליניאריים מעל הממשיים אז A סימטרית.

ב. (15 נק') הראו, על ידי דוגמה מפורשת, שאם הפולינום האפייני של A **אינו** מתפרק לגורמים ליניאריים מעל הממשיים אז A **אינה בהכרח** סימטרית.

<u>חלק ב׳</u>

בחלק זה עליכם לענות על שתיים מתוך השאלות 4-6. בכל שאלה, עליכם להוכיח את הטענה או להפריך אותה על ידי דוגמה נגדית מפורשת. משקל כל שאלה בחלק זה 15 נקודות.

שאלה 4

הוכיחו או הפריכו: תהי A מטריצה כך שלכל $\alpha \neq 0$, לא קיים $v \neq 0$ המקיים $Av = \alpha v$.
אזי A נילפוטנטית (כלומר, קיים m כך ש- $A^m = 0$).

שאלה 5

הוכיחו או הפריכו: יהי T אופרטור ויהי $S = TT^*$. אזי כל הערכים העצמיים של S הם מספרים ממשיים אי שליליים.

שאלה 6

הוכיחו או הפריכו: כל מטריצה משולשית עליונה שאינה מורכבת מבלוקי ז'ורדן היא לכסינה.

<u>חלק ג׳</u>

בחלק זה שאלה אחת שהיא שאלת בונוס שאינה חובה. משקל השאלה 5 נקודות.

שאלה 7 (בונוס)

תהי A מטריצה (לא בהכרח ריבועית).

א. הוכיחו כי $Ker(A^*A) = Ker(A)$.

ב. הוכיחו כי $rank(AA^*) = rank(A^*A)$.