

**בחינה בקורס אלגברה לינארית 2 (88-135-05/08) – מועד א'**

אוניברסיטת בר אילן, יום א', ט' אדר א' תשע"ד (9.2.14 למ')

**מרצים:** בוריס קוניאבסקי ונתן קלר.

**מתרגלים:** ארז שיינר, איתמר שטיין ויובל חציטריאן.

**משך הבחינה:** שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

**הנחיות**

- א. בבחינה שני חלקים. בכל חלק יש לענות על 2 שאלות מתוך 3. כמו כן, ניתן לענות על שאלת הבונוס.
- ב. השתמשו במחברת הבחינה לטיוטה, ולאחר שמצאתם פתרון מספק, כתבו אותו בצורה מסודרת בגוף הבחינה, במקום הפנוי המצוי לאחר השאלה. אם יש צורך במקום נוסף עבור התשובה, אפשר להמשיכה בגב אותו דף.
- ג. הקיפו בעיגול, בטבלה הבאה, את מספרי השאלות שעליהן עניתם.

ניקוד (לשימוש הבודקים)	השאלות שבחרתי (להקיף בעיגול)
/35	1
/35	2
/35	3
/15	4
/15	5
/15	6
/5	7 (בונוס)
/105	סה"כ

שאלות הבחינה מופיעות בעמודים הבאים.

**הבהרות.** גם אם הדבר לא מצויין במפורש בשאלות:

א. כל המרחבים הוקטוריים בבחינה הם ממימד סופי.

ב. עליכם לנמק את כל תשובותיכם.

**בהצלחה!**

חלק א'

בחלק זה, עליכם לענות על שתיים מתוך השאלות 1-3. משקל כל שאלה 35 נקודות.

**שאלה 1**

תהי  $A$  המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$  מעל הממשיים.

- א.** (20 נק') קבעו עבור אילו ערכים של  $a, b, c$  המטריצה  $A$  לכסינה.
- ב.** (15 נק') עבור כל אחת משלישיות הערכים  $(a, b, c)$  עבורן המטריצה לכסינה, מצאו מטריצה אלכסונית  $D$  ומטריצה  $P$  כך שמתקיים  $P^{-1}AP = D$ .

## שאלה 2

יהיו  $V, W$  מרחבי מכפלה פנימית, תהי  $T: V \rightarrow W$  העתקה לינארית, ותהי  $T^*$  ההעתקה הצמודה של  $T$ .

א. (20 נק') הוכיחו כי  $(\text{Im } T)^\perp = \text{Ker}(T^*)$ .

ב. (15 נק') הוכיחו כי  $\dim(\text{Ker}(T)) - \dim(\text{Ker}(T^*)) = \dim(V) - \dim(W)$ .

## שאלה 3

לשאלה שני חלקים שאינם קשורים זה לזה.

א. (20 נק') יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית. הוכיחו כי אופרטור  $T: V \rightarrow V$  הוא אוניטרי אם

$$\|Tv\| = \|v\| \text{ מתקיים } \forall v \in V.$$

ב. (15 נק') תהי  $A$  מטריצה בגודל  $4 \times 4$  מעל הממשיים, כך שמתקיימות התכונות הבאות:

$$a. \operatorname{tr}(A) = 0$$

$$b. \det(A - iI) = 0$$

$$c. \operatorname{rank}(A - I) = 3$$

חשבו את  $A^{80}$ .

**חלק ב'**

בחלק זה עליכם לענות על שתיים מתוך השאלות 4-6. בכל שאלה, עליכם להוכיח את הטענה או להפריך אותה על ידי דוגמה נגדית מפורשת. משקל כל שאלה בחלק זה 15 נקודות.

**שאלה 4**

**הוכיחו או הפריכו:** אם לשתי מטריצות יש אותו פולינום אפייני ואותו פולינום מינימלי אז הן דומות.

**שאלה 5**

**הוכיחו או הפריכו:** אם  $T$  אופרטור אוניטרי וצמוד לעצמו אז מתקיים  $T^3 = T$ .

**שאלה 6**

**הוכיחו או הפריכו:** אם  $A$  מטריצה סימטרית ממשית שאיננה מטריצת האפס, אז לא קיימת מטריצה אנטי-סימטרית ממשית הדומה ל  $A$ .

חלק ג'

בחלק זה שאלה אחת שהיא שאלת בונוס שאינה חובה. משקל השאלה 5 נקודות.

**שאלה 7 (בונוס)**

תהי  $A$  מטריצה ריבועית. הוכיחו כי אם  $A + A^* = AA^*$  אזי  $A$  נורמלית.