שאלה 1

יהי $v \in \mathbb{R}^3$ וקטור עמודה, ותהי $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ מטריצה שעמודותיה הן $v, 5773v, 5774v$. נתון שיש ל A ערך עצמי שונה מאפס. הוכח שהמטריצה A לכסינה. (32 נקודות)

תשובה:

$v \in \mathbb{R}^3$ וקטור עמודה.

$A \in \mathbb{R}^{3\times3}$.

$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v & 5773v & 5774v \\ | & | & | \end{pmatrix}$ (ע"פ הנתון).

נסמן:

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$A = \begin{pmatrix} v_1 & 5773v_1 & 5774v_1 \\ v_2 & 5773v_2 & 5774v_2 \\ v_3 & 5773v_3 & 5774v_3 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{u \in \mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} v_1 + 5773v_1 - 5774v_1 \\ v_2 + 5773v_2 - 5774v_2 \\ v_3 + 5773v_3 - 5774v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot v_1 \\ 0 \cdot v_2 \\ 0 \cdot v_3 \end{pmatrix} = 0 = 0 \cdot u$$

$$A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 5774 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{w \in \mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 5774v_1 + 5773v_1 \cdot 0 - 5774v_1 \\ 5774v_2 + 5773v_2 \cdot 0 - 5774v_2 \\ 5774v_3 + 5773v_3 \cdot 0 - 5774v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot v_1 \\ 0 \cdot v_2 \\ 0 \cdot v_3 \end{pmatrix} = 0 = 0w$$

— ברור ש- u ו- w הם וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$ שאינם ת"ל, וראינו שהם שייכים למרחב העצמי של הע"ע 0, לכן הם 2 ו"ע בת"ל עבור ה=0.

— בנוסף, נתון שקיים ל- A ע"ע נוסף אשר שונה מאפס — $\mu \neq 0$. משום ש-μ הוא ע"ע, קיים עבורו ו"ע u', ו"ע השייכים לע"ע שונים (וקבלנו μ ו- ה) הם בת"ל (ע"פ משפט), ולכן קיבלנו 3 ו"ע בת"ל - $B=\{u,w,u'\}$. הקבוצה B בת"ל (אמרנו קודם) ו- $\#B=3=\dim\mathbb{R}^3$, לכן, ע"פ המשפט "השליש חינם", נקבל ש- B הוא בסיס של $\mathbb{R}^3$, המכיל ו"ע של A. ע"פ משפט (A לכסינה $\Leftrightarrow$ קיים בסיס C של $\mathbb{R}^n$ המכיל ו"ע של A), ונקבל ש- A לכסינה.

מש"ל.

המשך - תרגיל 4:

צ״ל הוכחנו ש-:

$(U+W)^0 = U^0 \cap W^0$

משום שהמ״ו הנ״ל שווים, אז בהכרח שמימדיהם שווים, כלומר:

$\dim(U^0 \cap W^0) = \dim((U+W)^0)$ משפט ⊕⊕

נמשיך את המשוואה האחרונה שהגענו אליה קודם:

$\dim(U^0+W^0)+\dim(U+W) = 2n - \dim(U^0\cap W^0) - \dim(U\cap W)$

ע״פ משפט ⊛ לגבי המ״ו $U\cap W$ של V, נקבל:

$\dim(U^0+W^0)+\dim(U+W) = n + \dim(U\cap W)^0 - \underbrace{\dim(U^0\cap W^0)}_{=\dim(U+W)^0}$

ע״פ משפט ⊕⊕, נקבל:

$\dim(U^0+W^0)+\dim(U+W) = n+\dim(U\cap W)^0 - \dim(U+W)^0$

$\dim(U^0+W^0)+\dim(U+W)+\dim(U+W)^0 = n + \dim(U\cap W)^0$

ע״פ משפט ⊛ לגבי המ״ו $U+W$, נקבל:

$\dim(U^0+W^0)+\cancel{n} = \cancel{n}+\dim(U\cap W)^0$

$\dim(U^0+W^0) = \dim(U\cap W)^0$

סה״כ עד עכשיו הוכחנו ש:

1. $U^0+W^0 \subseteq (U\cap W)^0$
2. $\dim(U^0+W^0) = \dim(U\cap W)^0$

הפוך

לכן ע״פ המשפט שאומר $S\subseteq M$ א״מ ו- $S\subseteq M$, $\dim S = \dim M$, אז $M=S$ — ונקבל:

$\boxed{U^0+W^0=(U\cap W)^0}$

מש״ל.

יפה!

שאלה 2

סקור את הצעדים העיקריים (ללא הוכחתם) בהוכחת המשפט הבא: יהי T אופרטור כך שהפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים. אזי יש בסיס B כך ש $[T]_B$ הוא מטריצה אלכסונית־בלוקים, כך שכל בלוק באלכסון המטריצה הוא בלוק ג'ורדן.

סקירתך חייבת לכלול: הגדרת מרחב עצמי מוכלל, ניסוח המשפט על פירוק לסכום של מרחבים עצמיים מוכללים ויישומו להצגת T כמטריצה אלכסונית בלוקים, הצגת T לפיו, וכיצד עוברים למקרה של אופרטור נילפוטנטי, אופן בניית הבסיס המג'ורדן של אופרטור נילפוטנטי (ללא הוכחות). (32 נקודות)

תשובה:

המשך תרגיל 3ב

ע"פ מה שעשינו קודם:

$$[\pi_W]_S = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

= התשובה סופית.

משייכוי.

ב) נמצא את הפ"א של π_W:

$$P_{\pi_W}(x) = P_{[\pi_W]_S}(x) = |x\cdot I - [\pi_W]_S| =$$

$$= \left|\begin{pmatrix} (x-\frac{8}{9}) & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & (x-\frac{5}{9}) & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & (x-\frac{5}{9}) \end{pmatrix}\right| = 1\cdot(x-\tfrac{8}{9})\cdot\left[(x-\tfrac{5}{9})(x-\tfrac{5}{9})-\tfrac{16}{81}\right] - 1\cdot\tfrac{2}{9}\cdot\left[\tfrac{2}{9}(x-\tfrac{5}{9})-\tfrac{8}{81}\right] +$$

פיתוח לפי שורה I

דטר' של מט' מגודל 2x2:

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right| = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

$$+ \tfrac{2}{9}\left[\tfrac{8}{81} - \tfrac{2}{9}(x-\tfrac{5}{9})\right] = (x-\tfrac{8}{9})\left[x^2 - 1\tfrac{1}{9}x + \tfrac{1}{9}\right] - \tfrac{2}{9}\left[\tfrac{2}{9}(x-\tfrac{5}{9})-\tfrac{8}{81}\right] - \tfrac{2}{9}\left[\tfrac{2}{9}(x-\tfrac{5}{9})-\tfrac{8}{81}\right] =$$

$$= (x-\tfrac{8}{9})(x-\tfrac{1}{9})(x-1) - \tfrac{4}{9}\left(\tfrac{2}{9}x - \tfrac{18}{81}\right) = (x-\tfrac{8}{9})(x-\tfrac{1}{9})(x-1) - \tfrac{8}{81}x + \tfrac{8}{81} =$$

$$= (x-1)\left[(x-\tfrac{8}{9})(x-\tfrac{1}{9}) - \tfrac{8}{81}\right] = (x-1)(x^2-x) = \underline{x(x-1)^2}.$$

שאלה 3

נתבונן ב $\mathbb{R}^3$ כמרחב מכפלה פנימית, עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

יהי $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x+2y+2z=0\}$ תת־מרחב של $\mathbb{R}^3$.

תהי $\pi_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ פונקציית ההטלה האורתוגונלית על תת־המרחב W.

א. מצא את ההצגה של π_W ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$. (10 נקודות)

ב. מצא את הפולינום האופייני של π_W. (10 נקודות)

ג. הוכח שהאופרטור π_W ניתן ללכסון. (12 נקודות)

תשובה:

א

$W=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : x+2y+2z=0\}$

יהי $(x,y,z)\in W$.

$x+2y+2z=0$

$x=-2y-2z$

$(x,y,z)=(-2y-2z,y,z)=$

$=y(-2,1,0)+z(-2,0,1)=sp\{(-2,1,0),(-2,0,1)\}$.

$W=sp\{(-2,1,0),(-2,0,1)\}$

בסיס של W: $B=\{(-2,1,0),(-2,0,1)\}$

נפעיל את תהליך ג"ש על B לקבלת בא"ג של W:

נסמן: $v_1=(-2,1,0)$, $v_2=(-2,0,1)$

הבסיס האו"ג שנקבל של W $=\{\mathring{v}_1,\mathring{v}_2\}=\mathring{B}$

.1 $\mathring{v}_1 = v_1=(-2,1,0)$.

.2 $\mathring{v}_2=v_2-\pi_{\{\mathring{v}_1\}}(v_2)=v_2-\frac{\langle v_2,\mathring{v}_1\rangle}{\langle \mathring{v}_1,\mathring{v}_1\rangle}\cdot\mathring{v}_1=$

$=v_2-\frac{(4+0+0)}{5}\cdot\mathring{v}_1=v_2-\frac{4}{5}\mathring{v}_1=(-2,0,1)-(-\frac{8}{5},\frac{4}{5},0)=(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1)$.

אוקי סוף העמוד הלאה ההמשך הוא בדף של תרגיל 2	הבסיס ~~הא״נ~~ β שקיבלנו הוא $\beta=\{(-2,1,0),(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1)\}$

פונקציית ההטלה על W לא תלויה בבחירת בסיס (צ״ל ב בסיסים של W — B,C, $\pi_B(v)=\pi_C(v)$ (ע״פ משפט)).

לכן נבחר ע״י הבסיס β, והו״ל:

$\forall v\in\mathbb{R}^3: \pi_W(v)=\pi_\beta(v)$.

ההצגה של פונקציית ההטלה הנ״ל על הא״מ W. $-$ $[\pi_W]_S^S=\begin{pmatrix} | & | & | \\ [\pi_\beta((1,0,0)^T)]_S & [\pi_\beta((0,1,0)^T)]_S & [\pi_\beta((0,0,1)^T)]_S \\ | & | & | \end{pmatrix}$

S - הבסיס הסטנ': $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$$\pi_\beta\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\frac{\langle(1,0,0),(-2,1,0)\rangle}{\langle(-2,1,0),(-2,1,0)\rangle}\cdot(-2,1,0)+\frac{\langle(1,0,0),(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1)\rangle}{\langle(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1),(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1)\rangle}\cdot(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1)=$$

$$=\frac{-2}{5}(-2,1,0)+\frac{-\frac{2}{5}}{1\frac{4}{5}}(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1)=$$

$$=(\frac{4}{5},-\frac{2}{5},0)+(\frac{4}{45},\frac{8}{45},-\frac{2}{9})=\boxed{(\frac{8}{9},-\frac{2}{9},-\frac{2}{9})}$$

$$\pi_\beta\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\frac{\langle(0,1,0),(-2,1,0)\rangle}{\langle(-2,1,0),(-2,1,0)\rangle}\cdot(-2,1,0)+\frac{\langle(0,1,0),(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1)\rangle}{\langle(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1),(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1)\rangle}\cdot(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1)=$$

$$=\frac{1}{5}(-2,1,0)+\frac{-\frac{4}{5}}{1\frac{4}{5}}(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1)=$$

$$=(-\frac{2}{5},\frac{1}{5},0)-\frac{4}{9}(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1)=(-\frac{2}{5},\frac{1}{5},0)+(\frac{8}{45},\frac{16}{45},-\frac{4}{9})$$

$$=\boxed{(-\frac{2}{9},\frac{5}{9},-\frac{4}{9})}$$

$$\pi_\beta\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\frac{\langle(0,0,1),(-2,1,0)\rangle}{\langle(-2,1,0),(-2,1,0)\rangle}\cdot(-2,1,0)+\frac{\langle(0,0,1),(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1)\rangle}{\langle(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1),(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1)\rangle}\cdot(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1)$$

$$=\frac{0}{5}\cdot(-2,1,0)+\frac{1}{1\frac{4}{5}}\cdot(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1)=\frac{5}{9}(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1)=(-\frac{10}{45},-\frac{20}{45},\frac{5}{9})=[($$

שאלה 4

יהי V מרחב וקטורי. עבור קבוצה $S \subseteq V$, נסמן $S^\circ := \{\varphi \in V^* \,:\, \forall v \in S,\, \varphi(v) = 0\}$.

לכל תת־מרחב U של V מתקיים $\dim U + \dim U^\circ = \dim V$. (אינך מתבקש להוכיח זאת.)

הוכח: יהיו $U, W \subseteq V$ תת־מרחבים. אזי $(U \cap W)^\circ = U^\circ + W^\circ$. (32 נקודות)

תשובה:

יה"א $U, W \subseteq V$.

צ"ל

$(U \cap W)^\circ = U^\circ + W^\circ$.

הוכחה:

$\boxed{\subseteq}$ יהי $\varphi \in (U^\circ + W^\circ)$.

לכן, ניתן להציג כסכום של איבר מ-U° ואיבר מ-W°.

$\varphi = \underset{U^\circ}{\varphi_u} + \underset{W^\circ}{\varphi_w}$

יהי $v \in U \cap W$ כלשהו.

$\varphi(v) = (\varphi_u + \varphi_w)(v) =$

$= \varphi_u(\underset{U}{v}) + \varphi_w(\underset{W}{v}) = $ $(\varphi_u \in U^\circ,\ \varphi_w \in W^\circ)$ ✓ 10

$= 0 + 0 = 0$.

$\forall v \in U \cap W,\ \varphi(v) = 0.$

$\Downarrow$

$\varphi \in (U \cap W)^\circ$

$\Downarrow$

$\boxed{(U^\circ + W^\circ) \subseteq (U \cap W)^\circ}$

כעת, נראה ע"י מכפלת מימדים

$$\begin{cases} \dim(U^0+W^0) = \dim(U^0) + \dim(W^0) - \dim(U^0\cap W^0) \\ \dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U\cap W) \end{cases} +$$

$$\dim(U^0+W^0) + \dim(U+W) = (\dim U + \dim U^0) + (\dim W + \dim W^0) - \dim(U^0\cap W^0) - \dim(U\cap W).$$

נובע מ-טענה
לכן כמשפט ⊛

ע"פ טענה ע"י מ"א אם $U_1 \subseteq V$

$$\dim(U_1) + \dim((U_1)^0) = \dim V = n \quad (\text{נתון})$$

ע"פ משפט ⊛,

$$\dim(U^0+W^0) + \dim(U+W) = 2n - \dim(U^0\cap W^0) - \dim(U\cap W)$$

כעת, נוכיח ע"י 2 הכלות דו כיווניות:

$$U^0\cap W^0 = (U+W)^0$$

$\subseteq$: יהי $\varphi \in U^0\cap W^0$.

יהי $v \in (U+W)$.

ניתן לפרק את v כך:

$$v = \underset{\in U}{u} + \underset{\in W}{w}$$

$$\varphi(v) = \varphi(u+w) = \varphi(u) + \varphi(w) = 0 + 0 = 0$$

$$\varphi \in U^0\cap W^0 \iff \varphi\in U^0 \wedge \varphi \in W^0$$

$$\forall v\in U+W: \varphi(v) = 0 \Rightarrow \varphi \in (U+W)^0 \Rightarrow (U^0\cap W^0) \subseteq (U+W)^0$$

$\supseteq$: נזכיר שכל מ"א שווה 0 ל-0

יהי $\varphi \in (U+W)^0$.

יהי $u \in U$ ו- $w \in W$.

$$u = \underset{\in U}{u} + \underset{\in W}{0} \wedge w = \underset{\in U}{0} + \underset{\in W}{w} \Rightarrow u, w \in U+W$$

כעת, מכיוון ש- $\varphi \in (U+W)^0$ ו- $u, w \in U+W$, אז

$$\varphi(u) = \varphi(w) = 0$$

$$\Rightarrow \forall u\in U: \varphi(u) = 0, \quad \forall w \in W: \varphi(w) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi \in U^0\cap W^0} \Rightarrow \boxed{(U+W)^0 \subseteq U^0\cap W^0}$$

המשך בעמוד
האחורי שלהדף
של תרגיל 1