בחינה בקורס **אלגברה לינארית 2** (88-113-05/08) - מועד ב'

אוניברסיטת בר־אילן, יום ה', כ"ד ניסן תשע"ב (4.4.13 למ')

מרצים: בועז צבאן, בוריס קוניאבסקי.

מתרגלים: יובל חצ'טריאן, אפי כהן, ארז שיינר.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

הנחיות

א. יש לענות על **3** מתוך 4 שאלות הבחינה.

השתמש במחברת הבחינה לטיוטה, ולאחר שמצאת פתרון מספק, כתוב אותו בצורה מסודרת **בגוף הבחינה**, במקום הפנוי המצוי לאחר השאלה.

אם יש צורך בלתי נמנע במקום נוסף עבור התשובה, אפשר להמשיכה בגב אותו דף. לא תתקבל תשובה המשתרעת על פני יותר משני עמודים.

ב. משקל כל שאלה הוא 32 נקודות. 4 נקודות מוקצות עבור סדר ונקיון הבחינה.

ג. הקף בעיגול, בטבלה הבאה, את מספרי השאלות שעליהן ענית.

השאלות שבחרתי (להקיף בעיגול)	**ניקוד** (לשימוש הבודקים)
1	
2	
3	
4	
סדר ונקיון	
סה"כ	

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

הבהרות. גם אם הדבר לא מצויין במפורש בשאלות:

1. כל המרחבים הוקטוריים במבחן הם ממימד סופי.
2. עליך לנמק את כל תשובותיך.

בהצלחה!

שאלה 1

יהי $v \in \mathbb{R}^3$ וקטור עמודה, ותהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ מטריצה שעמודותיה הן $v, 5773v, 5774v$. נתון שיש ל A ערך עצמי שונה מאפס. הוכח שהמטריצה A לכסינה. (32 נקודות)

תשובה:

שאלה 2

סקור את הצעדים העיקריים (ללא הוכחתם) בהוכחת המשפט הבא: יהי T אופרטור כך שהפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים. אזי יש בסיס B כך ש $[T]_B$ הוא מטריצה אלכסונית־בלוקים, כך שכל בלוק באלכסון המטריצה הוא בלוק ג'ורדן.

סקירתך חייבת לכלול: הגדרת מרחב עצמי מוכלל, ניסוח המשפט על פירוק לסכום של מרחבים עצמיים מוכללים ויישומו להצגת T כמטריצה אלכסונית בלוקים, הצגת T לפיו, וכיצד עוברים למקרה של אופרטור נילפוטני, אופן בניית הבסיס המג'רדן של אופרטור נילפוטנטי (ללא הוכחות). (32 נקודות)

תשובה:

שאלה 3

נתבונן ב $\mathbb{R}^3$ כמרחב מכפלה פנימית, עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

יהי $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+2y+2z=0\}$ תת־מרחב של $\mathbb{R}^3$.

תהי $\pi_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ פונקציית ההטלה האורתוגונלית על תת־המרחב W.

א. מצא את ההצגה של π_W ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$. (10 נקודות)

ב. מצא את הפולינום האופייני של π_W. (10 נקודות)

ג. הוכח שהאופרטור π_W ניתן ללכסון. (12 נקודות)

תשובה:

שאלה 4

יהי V מרחב וקטורי. עבור קבוצה $S \subseteq V$, נסמן $S^\circ := \{\varphi \in V^* \,:\, \forall v \in S,\, \varphi(v) = 0\}$.

לכל תת־מרחב U של V מתקיים $\dim U + \dim U^\circ = \dim V$. (אינך מתבקש להוכיח זאת.)

הוכח: יהיו $U, W \subseteq V$ תת־מרחבים. אזי $(U \cap W)^\circ = U^\circ + W^\circ$. (32 נקודות)

תשובה: