שאלה 1

נגדיר אופרטור לינארי $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ על ידי

$$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c+ai\\c+bi\\-ci\end{pmatrix}.$$

א. האם T הפיך? (10 נקודות)

ב. האם T ניתן ללכסון? (10 נקודות)

ג. לכל $n\in\{-1,3,2013\}$, חשב את T^n או הוכח ש T^n אינו מוגדר. (12 נקודות)

תשובה:

א. האם T הפיך? נמצא המטריצה של T לפי הבסיס הסט' $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$\left[T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_S=\left[\begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix}\right]_S=\begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix},\ \left[T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_S=\left[\begin{pmatrix}0\\i\\0\end{pmatrix}\right]_S=\begin{pmatrix}0\\i\\0\end{pmatrix},\ \left[T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_S=\left[\begin{pmatrix}-1\\1\\-i\end{pmatrix}\right]_S=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow[T]_S=\begin{pmatrix}i&0&-1\\0&i&1\\0&0&-i\end{pmatrix}$$

המטריצה הנ"ל מדורגת ולכן הפיכה. לכן גם $\boxed{T\text{ הפיכה}}$

ב. נמצא את הערכים העצמיים של T

$$P_T(x)=|\lambda I-T|=\begin{vmatrix}\lambda-i&0&1\\0&\lambda-i&-1\\0&0&\lambda+i\end{vmatrix}=(\lambda-i)^2(\lambda+i)\Rightarrow\lambda=\pm i$$

נמצא ו"ע;

$\underline{\lambda=i}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}i-i&0&-1&0\\0&i-i&1&0\\0&0&i+i&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&2i&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow z=0\Rightarrow\begin{pmatrix}t\\s\\0\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

ר"ג $=$ ל"ג $=\dim V_i=2\ \Leftarrow\ V_i=Sp\{e_1,e_2\}\ \Leftarrow$

$\underline{\lambda=-i}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-i-i&0&1&0\\0&-i-i&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{i}{2}&0\\0&1&\frac{i}{2}&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to x=\frac{i}{2}z,\ y=-\frac{i}{2}z\Rightarrow\begin{pmatrix}\frac{i}{2}t\\-\frac{i}{2}t\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}i/2\\-i/2\\1\end{pmatrix}$$

ר"ג $=$ ל"ג $=\dim V_{-i}=1\ \Leftarrow\ V_{-i}=span\left\{\begin{pmatrix}i/2\\-i/2\\1\end{pmatrix}\right\}\ \Leftarrow$

קיבלנו שהריבוי הגיאומטרי של כל ע"ע שווה לריבוי האלגברי. לכן המטריצה $[T]_S$ לכסינה ולכן גם $\boxed{T\text{ לכסינה}}$

ג. $n=-1$ $\quad T^n=T^{-1}$ נמצא את ההופכי

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}i&0&-1&1&0&0\\0&i&1&0&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\cdot i]{R_1\cdot -i,\ R_2\cdot -i}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&i&-i&0&0\\0&1&-i&0&-i&0\\0&0&1&0&0&i\end{array}\right)\xrightarrow[R_2+iR_3]{R_1-iR_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-i&0&1\\0&1&0&0&-i&-1\\0&0&1&0&0&i\end{array}\right)\Rightarrow[T]_S^{-1}=\begin{pmatrix}-i&0&1\\0&-i&-1\\0&0&i\end{pmatrix}$$

$$T^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=[T]_S^{-1}\left[\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right]_S=\begin{pmatrix}-i&0&1\\0&-i&-1\\0&0&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c-ai\\-c-bi\\ci\end{pmatrix},\quad\boxed{T^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c-ai\\-c-bi\\ci\end{pmatrix}}$$

⇐ המשך בדף הבא

$$T^n = T^3 \qquad \underline{n=3}$$

$$[T]_S^3 = \begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\boxed{[T]_S^3 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}} \Rightarrow [T]_S^3 = [T]_S^{-1} \Rightarrow T^3 = T^{-1} \Rightarrow \boxed{T^3\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-ai \\ -c-bi \\ ci \end{pmatrix}}$$

מהנתון הקודם

$$\underline{n = 2013}$$

מסעיף הקודם נובע

$$\Downarrow \quad [T]_S^3 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = [T]_S^{-1}$$

$$T^4 = T^3 T = T^{-1} T = I \;/ ()^{503}$$

כן

$$(T^4)^{503} = I^{503} = I$$

$$T^{2012} = I \;/ \cdot T$$

$$\Downarrow \quad T^{2012} T = T \cdot I = T$$

$$T^{2012} \cdot T = T$$

$$T^{2013} = T$$

$$\Downarrow$$

$$T^{2013}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c+ai \\ c+bi \\ -ci \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{T^{2013}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c+ai \\ c+bi \\ -ci \end{pmatrix}}$$

שאלה 2

יהיו $n > 2$, $J = J_n(0) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ בלוק ג'ורדן עם ערך עצמי 0, ו $B = J^2$.

א. מצא את הפולינום המינימלי של המטריצה B (אם יש צורך, הפרד בין המקרה ש n זוגי למקרה ש n איזוגי). (10 נקודות)

ב. מצא את צורת ג'ורדן של B. (10 נקודות)

ג. הוכח כי המטריצות J, B מתחלפות (כלומר: $JB = BJ$), אך אין מטריצה הפיכה P כך שגם $P^{-1}JP$ וגם $P^{-1}BP$ הן בצורת ג'ורדן. (12 נקודות)

תשובה:

(א) נשים לב שמתקיים:

$$J=\begin{pmatrix}0&1&&0\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\0&&&0\end{pmatrix},\quad J^2=\begin{pmatrix}0&0&1&&0\\0&0&\ddots&\ddots&\\\vdots&\vdots&&\ddots&1\\0&0&\cdots&\cdots&0\\0&0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix},\quad J^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1&&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\ddots&1\\0&0&0&\cdots&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$$

כלומר לכל $k\in\mathbb{N}$, J^k היא מטריצה אשר בה k אלכסונים אפסים משמאל. B היא מטריצה נילפוטנטית כי קודם של J^2, ויש לה אפסים באלכסון והיא משולשית, לכן הע"ע שלה הוא 0 (ש"ל פולינום אופייני). $P_B(x)=x^n$.

הפולינום המינימלי שלה יהיה מהצורה $m_B(x)=x^k$ עבור $k\in\mathbb{N}$, $k\le n$, מינימלי. נבדוק עבור איזה k מינימלי $B^k=0$:

2k אלכסונים אפסים

$$B^k=J^{2k}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\\vdots&&\vdots&\\0&\cdots&0&\end{pmatrix}=0$$

כל זה יתקיים רק כאשר $n\le 2k$. אם n זוגי, אז $2k=n$ $\Leftarrow$ $k=\frac{1}{2}n$ $\Leftarrow$ $m_B(x)=x^{\frac{1}{2}n}$.
אם n אי זוגי, $2k=n+1$ $\Leftarrow$ $k=\frac{1}{2}(n+1)$ $\Leftarrow$ $m_B(x)=x^{\frac{1}{2}(n+1)}$.

(ב) כבר ראינו ש-B נילפוטנטית ולכן הע"ע היחיד שלה הוא אפס. נמצא את V_0: נחפש $v\in\mathbb{C}^n$ המקיימים $Bv=0$.

נסמן $v=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$.

$$Bv=J^2(v)=J^2\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=J\cdot J\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=J\cdot\begin{pmatrix}x_2\\\vdots\\x_n\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3\\\vdots\\x_n\\0\\0\end{pmatrix}=0$$

לכן קיבלנו $x_3=\dots=x_n=0$. כלומר x_1,x_2 חופשיים. לכן בסיס ל-V_0 יהיה:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right\}=\{e_1,e_2\}$$

$\dim V_0=2$ לכן בצורת ג'ורדן של B יהיו 2 בלוקי ג'ורדן. אחד בגודל $k\times k$ כש-$m_B(x)=x^k$, והשני יהיה את המשלים לגודל $n\times n$, כלומר יהיה בגודל $(n-k)\times(n-k)$.

לכן, אם n זוגי אז $k=\frac{1}{2}n$, וצורת ז'ורדן של B היא: $\boxed{\begin{pmatrix} J_{\frac{1}{2}n}(0) & 0 \\ 0 & J_{\frac{1}{2}n}(0) \end{pmatrix}}$

אם n אי-זוגי אז $k=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$, $n-k=\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$

וצורת ז'ורדן של B היא: $\begin{pmatrix} J_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}(0) & 0 \\ 0 & J_{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}(0) \end{pmatrix}$

(2) נוכיח כי $JB=BJ$:

J, B מתחלפות: $JB=J\cdot J^2=J\cdot J\cdot J=J^2\cdot J=BJ \Rightarrow$

כעת נוכיח כי אין מטריצה הפיכה P כך שגם $P^{-1}JP$ וגם $P^{-1}BP$ הן בצורת ז'ורדן.

ראינו כבר את צורת ז'ורדן של B ומצאנו שהיא שונה מ- $J=J_n(0)$ (מכיוון ש- $n>2$).

נסמן את צורת ז'ורדן של B בתור B_J.

נניח בשלילה שקיימת P הפיכה כך ש- $P^{-1}JP$ וגם $P^{-1}BP$ בצורת ז'ורדן. מיחידות צורת ז'ורדן המתאימות,

$P^{-1}JP=J$, $P^{-1}BP=B_J$.

$P^{-1}JP=J \underset{\text{נעלה בריבוע}}{\Rightarrow} (P^{-1}JP)^2=J^2 \Rightarrow$ ~~$P^{-1}BP=J^2$~~ $B_J=P^{-1}\underset{J^2}{B}P=J^2$

אבל כבר ראינו איך B_J, J^2 נראות ולכן $B_J\neq J^2$,

ולכן הגענו לסתירה.

ולסיכום: מוכח שלא קיימת P הפיכה כך שגם $P^{-1}JP$

וגם $P^{-1}BP$ הן בצורת ז'ורדן.

שאלה 3

יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 2. נגדיר מכפלה פנימית על V על ידי:

$$\left\langle a_1+b_1x+c_1x^2 ; a_2+b_2x+c_2x^2\right\rangle = 4a_1a_2+2b_1b_2+c_1c_2$$

לכל $a_1+b_1x+c_1x^2, a_2+b_2x+c_2x^2 \in V$.

א. הוכח שזו אכן מכפלה פנימית על V. (16 נקודות)

ב. מצא בסיס אורתונורמלי של V. (16 נקודות)

תשובה:

א. לינאריות ברכיב ראשון:

יהיו $a_1+b_1x+c_1x^2,\ a_2+b_2x+c_2x^2,\ a_3+b_3x+c_3x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$

ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$\langle \alpha(a_1+b_1x+c_1x^2)+\beta(a_2+b_2x+c_2x^2), a_3+b_3x+c_3x^2\rangle$

$=\langle (\alpha a_1+\beta a_2)+(\alpha b_1+\beta b_2)x+(\alpha c_1+\beta c_2)x^2, a_3+b_3x+c_3x^2\rangle$

$=4(\alpha a_1+\beta a_2)\cdot a_3+2(\alpha b_1+\beta b_2)b_3+(\alpha c_1+\beta c_2)c_3$

$=4\alpha a_1a_3+4\beta a_2a_3+2\alpha b_1b_3+2\beta b_2b_3+\alpha c_1c_3+\beta c_2c_3$

$=(4\alpha a_1a_3+2\alpha b_1b_3+\alpha c_1c_3)+(4\beta a_2a_3+2\beta b_2b_3+\beta c_2c_3)$

$=\alpha\langle a_1+b_1x+c_1x^2, a_3+b_3x+c_3x^2\rangle+\beta\langle a_2+b_2x+c_2x^2, a_3+b_3x+c_3x^2\rangle$ ☑

סימטריות:

יהיו $a_1+b_1x+c_1x^2,\ a_2+b_2x+c_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]$

צ"ל: $\langle a_1+b_1x+c_1x^2, a_2+b_2x+c_2x^2\rangle=\langle a_2+b_2x+c_2x^2, a_1+b_1x+c_1x^2\rangle$

$\langle a_1+b_1x+c_1x^2, a_2+b_2x+c_2x^2\rangle=4a_1a_2+2b_1b_2+c_1c_2=4a_2a_1+2b_2b_1+c_2c_1$

$=\overline{4a_2a_1+2b_2b_1+c_2c_1}=\overline{\langle a_2+b_2x+c_2x^2, a_1+b_1x+c_1x^2\rangle}$

כי זה מ $\mathbb{R}$ ☑

הגורם המיימית

חיוביות:

יהי $\mathbb{R}_2[x]\ni p(x)=a_1+b_1x+c_1x^2$

צ"ל $\langle p(x),p(x)\rangle\geq0$ וגם כי $\langle p(x),p(x)\rangle=0$ אם"ם $p(x)=0$

$\langle p(x),p(x)\rangle=\langle a_1+b_1x+c_1x, a_1+b_1x+c_1x\rangle=\underbrace{4a_1^2}_{\geq0}+\underbrace{2b_1^2}_{\geq0}+\underbrace{c_1^2}_{\geq0}\geq0$

$\Leftarrow$ נניח $\langle p(x),p(x)\rangle=0$, ולכן $4a_1^2+2b_1^2+c_1^2=0 \Rightarrow a_1=b_1=c_1=0 \Rightarrow p(x)=0$

$\Rightarrow$ $p(x)=0 \Rightarrow 0=a_1=b_1=c_1 \Rightarrow \langle p(x),p(x)\rangle=4a_1^2+2b_1^2+c_1^2=0$ ☑

הוכחנו לינאריות ברכיב הראשון, סימטריות וחיוביות ולכן לפי הגדרה זו מ"פ

ג. מצא בסיס.

נבצע גרם-שמידט $S=\{1,x,x^2\}$ ונרמלו. ג.כ

$$V_1' = V_1 = 1$$

$$V_2' = V_2 - \pi_{V_1'} V_2 = X - \frac{\langle X,1\rangle}{\|1\|^2}\cdot 1 = X - \frac{0}{\|1\|^2}\cdot 1 = X$$

$$V_3' = V_3 - \pi_{\{V_1',V_2'\}} = X^2 - \frac{\langle X^2,1\rangle}{\|1\|^2}1 - \frac{\langle X^2,X\rangle}{\|X\|^2}\cdot X = X^2 - 0 - 0 = X^2$$

לכן קיבלנו $S'=\{1,x,x^2\}$, ננרמל.

$$\|1\| = \sqrt{\langle 1,1\rangle} = \sqrt{4\cdot 1\cdot 1} = 2 \Rightarrow \left\|\frac{1}{2}\right\| = 1$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{2\cdot 1\cdot 1} = \sqrt{2} \Rightarrow \left\|\frac{x}{\sqrt{2}}\right\| = 1$$

$$\|x^2\| = \sqrt{\langle x^2,x^2\rangle} = \sqrt{1\cdot 1} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow \|x^2\| = 1$$

לכן $\left\{\frac{1}{2},\frac{x}{\sqrt{2}},x^2\right\}$ בסיס ל-$\mathbb{R}_2[x]$ לפי המ״פ הנתונה

✓

שאלה 4

יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי כך שהפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים.

הוכח שקיים בסיס אורתונורמלי B של V כך שהמטריצה $[T]_B$ משולשית. (32 נקודות)

תשובה:

יהי T כך ש $p_T(x)$ מתפרק. צ"ל קיים B בסיס א"נ של V כך שהמטריצה $[T]_B$ משולשית.

לפי משפט השילוש קיים בסיס B' כך ש $[T]_{B'}$ משולשית.

נבצע את תהליך גרם שמידט על B' ונקבל את B (בסיס א"נ)

נוכיח כי $[T]_B$ משולשית עליונה.

$$[T]_B = [I]_B^{B'}[T]_{B'}[I]_{B'}^{B}$$

לפי משפט, מטריצת המעבר בין בסיס לתוצאת תהליך ג"ש היא משולשית עליונה

לכן $[I]_B^{B'}$ משולשית עליונה וגם $\left([I]_B^{B'}\right)^{-1} = [I]_{B'}^{B}$ משולשית עליונה.

לכן $[T]_B = [I]_B^{B'}[T]_{B'}[I]_{B'}^{B}$

משולשית עליונה משולשית משולשית עליונה

* נוכיח כי מכפלה של מטריצות משולשיות עליונות, היא מטריצה משולשית עליונה:

יהיו A,B מטריצות משולשיות עליונות, ויהיו $1\le j<i\le n$

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=i}^{n} A_{ik}B_{kj}$$

$k \ge i > j$ ו-B משולשית עליונה

$\Leftarrow B_{kj}=0$

$\Leftarrow \sum_{k=i}^{n} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=i}^{n} A_{ik}\cdot 0 = 0$

$k<i$ ו-A משולשית עליונה

$A_{ik}=0 \Leftarrow$

$\Leftarrow \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik}\cdot 0 = 0$

$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=i}^{n} A_{ik}B_{kj} = 0 \Leftarrow$ לכן המטריצה AB משולשית עליונה.

הראנו שמכפלת מטריצות משולשות עליונות מטריצה
משולשת עליונה. ולכן

$[I]_B^{B'}[T]_{B'}$ היא מכפלה של מטריצות משולשות עליונות ולכן
היא גם משולשת עליונה

ושוב: $[T]_B = \left([I]_B^{B'}[T]_{B'}\right)[I]_{B'}^{B}$ היא מכפלה של 2 מטריצות משולשות עליונות
ולכן משולשת עליונה

משולשת עליונה   משולשת עליונה

$\Leftarrow$ $[T]_B$ משולשת עליונה.

מצאנו B בסיס כך ש $[T]_B$ משולשת ✓