בחינה בקורס **אלגברה לינארית 2** (88-113-05/08) - מועד א'

אוניברסיטת בר־אילן, יום ה', ד' אדר תשע"ב (14.2.13 למ')

מרצים: בועז צבאן, בוריס קוניאבסקי.

מתרגלים: יובל חצ'טריאן, אפי כהן, ארז שיינר.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

הנחיות

א. יש לענות על **3** מתוך 4 שאלות הבחינה.

השתמש במחברת הבחינה לטיוטה, ולאחר שמצאת פתרון מספק, כתוב אותו בצורה מסודרת **בגוף הבחינה**, במקום הפנוי המצוי לאחר השאלה.

אם יש צורך בלתי נמנע במקום נוסף עבור התשובה, אפשר להמשיכה בגב אותו דף. לא תתקבל תשובה המשתרעת על פני יותר משני עמודים.

ב. משקל כל שאלה הוא 32 נקודות. 4 נקודות מוקצות עבור סדר ונקיון הבחינה.

ג. הקף בעיגול, בטבלה הבאה, את מספרי השאלות שעליהן ענית.

השאלות שבחרתי (להקיף בעיגול)	**ניקוד** (לשימוש הבודקים)
1	
2	
3	
4	
סדר ונקיון	
סה"כ	

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

הבהרות. גם אם הדבר לא מצויין במפורש בשאלות:

1. כל המרחבים הוקטוריים במבחן הם ממימד סופי.
2. עליך לנמק את כל תשובותיך.

בהצלחה!

שאלה 1

נגדיר אופרטור לינארי $T\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ על ידי

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c+ai \\ c+bi \\ -ci \end{pmatrix}.$$

א. האם T הפיך? (10 נקודות)

ב. האם T ניתן ללכסון? (10 נקודות)

ג. לכל $n \in \{-1, 3, 2013\}$, חשב את T^n או הוכח ש T^n אינו מוגדר. (12 נקודות)

תשובה:

שאלה 2

יהיו $n > 2$, $J = J_n(0) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ בלוק ג'ורדן עם ערך עצמי 0, ו $B = J^2$.

א. מצא את הפולינום המינימלי של המטריצה B (אם יש צורך, הפרד בין המקרה ש n זוגי למקרה ש n איזוגי). (10 נקודות)

ב. מצא את צורת ג'ורדן של B. (10 נקודות)

ג. הוכח כי המטריצות J, B מתחלפות (כלומר: $JB = BJ$), אך אין מטריצה הפיכה P כך שגם $P^{-1}JP$ וגם $P^{-1}BP$ הן בצורת ג'ורדן. (12 נקודות)

תשובה:

שאלה 3

יהי $V = \mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 2. נגדיר מכפלה פנימית על V על ידי:

$$\left\langle a_1 + b_1x + c_1x^2, a_2 + b_2x + c_2x^2 \right\rangle = 4a_1a_2 + 2b_1b_2 + c_1c_2$$

לכל $a_1 + b_1x + c_1x^2, a_2 + b_2x + c_2x^2 \in V$.

א. הוכח שזו אכן מכפלה פנימית על V. (16 נקודות)

ב. מצא בסיס אורתונורמלי של V. (16 נקודות)

תשובה:

שאלה 4

יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהי $T\colon V \to V$ אופרטור לינארי כך שהפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים.

הוכח שקיים בסיס אורתונורמלי B של V כך שהמטריצה $[T]_B$ משולשית. (32 נקודות)

תשובה: