שאלה 1

יהי V מרחב מכפלה פנימית. יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי נורמלי, שהפולינום האופייני שלו הוא

$$.(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$$

ענה, עם נימוק קצר, על כל אחת מהשאלות הבאות:

א. מהם המימדים האפשריים של התת־מרחב $U = \{v \in V \;:\; T(v) = 3v\}$? (8 נקודות)

ב. מהו הפולינום המינימלי של T? (12 נקודות)

ג. האם ייתכן כי T אופרטור אוניטרי? (12 נקודות)

תשובה:

א. $\dim U = \dim V_3$, הריבוי הגאומטרי של הערך העצמי $\lambda = 3$. הפולינום האופייני נתון מתפרק לגורמים לינאריים.
T נורמלי (נתון), לכן לכסין, ולכן הריבוי הגאומטרי של 3 = ריבוי האלגברי של 3,
שהוא 3, כמו שרואים בפולינום האופייני.

ב. T לכסין (כנ"ל), ולכן לפי הפולינום האופייני שלו, ניתן להציגו כמטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 2 & & & 0 & \\ & & 2 & & & \\ & & & 3 & & \\ & 0 & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

$m_T(x) = m_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ (פולינום מינימלי של מטריצה אלכסונית).

ג. לא.

לאופרטור אוניטרי יש רק ערכים עצמיים λ עם $|\lambda| = 1$.

לאופרטור בשאלתנו יש ערך עצמי 3 (למשל).

שאלה 2

תהי

$$.A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_3)^{3\times 3}$$

א. מצא את הפולינום האופייני של המטריצה A, והראה שהוא מתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{Z}_3$. (6 נקודות)

ב. מצא את צורת ג'ורדן של A. (6 נקודות)

ג. מצא מטריצה הפיכה $P \in (\mathbb{Z}_3)^{3\times 3}$ כך שהמטריצה $J = P^{-1}AP$ היא בצורת ג'ורדן. (20 נקודות)

תשובה:

פיתוח לפי עמ' III

א. $|xI-A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 0 \\ 2 & 1 & x \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0\left|*\right| + x\begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 2(2-2x) + x(x^2-2) = x^3-2 =$

$= (x-2)(x^2-x+1) = (x-2)(x-2)(x-2) = (x-2)^3.$

(על ידי הצבת הערכים 0,1,2 בפולינום רואים מי מאפס (2) ואז מוציאים $x-2$ החוצה. עושים זאת עד שמקבלים מכפלת גורמים לינאריים.)

ב. $p_A(x)=(x-2)^3$ (ראינו), לכן $m_A(x)=(x-2)^i$ לאיזשהו $1 \le i \le 3$.

$A-2I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \theta.$ $(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \theta \Rightarrow m_A(x) = (x-2)^3$

לכן, $J_3(2)$ מופיע בצורת ג'ורדן של A וכיון שהיא מ' 3x3, צורת ג'ורדן של A היא $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ג. מצורת ג'ורדן של A שחושבה בסעיף הקודם, אנו יודעים שהבסיס המג'רדן הוא מסלול אחד באורך 3, כלומר מצורה v, $(A-2I)v$, $\underbrace{(A-2I)^2v}_{u}$ כאשר $\vec{0} \neq u \in Col(A-2I)^2$. מהחישוב שעשינו בסעיף הקודם, אפשר לקחת $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

אז $u=(A-2I)^2e_1$, ולכן ניקח: $v=e_1$, $(A-2I)e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(A-2I)^2e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ניקח איפוא $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

אזי $P^{-1}AP = J$.

שאלה 3

א. נסח את משפט ההצגה של ריס. (6 נקודות)

ב. יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהי $U \subseteq V$ תת־מרחב. הוכח:

לכל $\varphi \in U^\circ$ קיים $w \in U^\perp$ יחיד כך ש $\varphi(v) = \langle v, w \rangle$ לכל $v \in V$. (26 נקודות)

תשובה:

א. יהי V מרחב מכפלה פנימית. לכל פונקציונל לינארי $\varphi \in V^*$, יש $w \in V$ יחיד כך ש $\varphi(v) = \langle v, w \rangle$ לכל $v \in V$.

ב. יהי $\varphi \in U^\circ$. בפרט, $\varphi \in V^*$ וממשפט ריס הנ"ל, יש $w \in V$ יחיד כך ש $\varphi(v) = \langle v, w \rangle$ לכל $v \in V$.

נותר להוכיח ש $w \in U^\perp$.

יהי $u \in U$. אז $\langle u, w \rangle = \varphi(u) \underset{\varphi \in U^\circ,\ u \in U}{=} 0$.

שאלה 4

א. הגדר: מטריצה אורתוגונלית. (4 נקודות)

ב. הוכח שלכל מטריצה סימטרית $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, יש מטריצה אורתוגונלית $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך שהמטריצה P^tAP היא אלכסונית. (14 נקודות)

ג. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{R}$, ונניח שמתקיים $AA^t = A^tA$. הוכח ש $A = A^t$. (14 נקודות)

תשובה:

א. מטריצה $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ היא <u>אורתוגונלית</u> אם $PP^t = P^tP = I$.
במלים: P מטריצה ממשית, ריבועית, הפיכה, המקיימת $P^t = P^{-1}$.

ב. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ וסימטרית. בפרט, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ וצמודה לעצמה. לכן, כל הערכים העצמיים של A, $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ (מעל $\mathbb{C}$) הם ממשיים. מעל $\mathbb{C}$, $p_A(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$ וכיון ש $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ממשיים, זה נכון גם מעל $\mathbb{R}$. לכן, $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{R}$.
ממשפט הליכסון האוניטרי במקרה $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, יש מטריצה אוניטרית $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $P^{-1}AP$ אלכסונית.
$$P^{-1}AP = P^*AP$$
כיון ש $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $P^* = P^t$; P אורתוגונלית.

ג. ממשפט הליכסון האוניטרי במקרה $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, כיון ש A נורמלית והפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$, יש $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אוניטרית כך ש $D := P^*AP$ מטריצה אלכסונית. כיון ש $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $P^{-1} = P^* = P^t$.
$D = P^{-1}AP \Leftarrow PDP^t = PDP^{-1} = A$. לכן,
$$A^t = (PDP^t)^t = (P^t)^tD^tP^t \underset{\uparrow}{=} PDP^t = A.$$
D אלכסונית
ולכן סימטרית