שאלה 1

א. הגדר: ערך עצמי של מטריצה ריבועית. (5 נקודות)

ב. מצא את הערכים העצמיים של המטריצה A^tA, כאשר A היא מטריצת השורה $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{C}^{1\times n}$. (27 נקודות)

הצעה: עבוד ישירות עם ההגדרה של ערך עצמי.

תשובה:

$A\in F^{n\times n}$ ו'

א) $\lambda\in\mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של אם קיים

$0\neq V\in\mathbb{F}^n$ כך ש- $AV=\lambda V$ [illegible]

$$\operatorname{rank} A^tA \overset{(\text{ספר})}{\le} \operatorname{rank} A \le 1 \quad (A\in\mathbb{C}^{1\times n})$$

$\Downarrow$

$$\dim V_0 = \dim N(A^tA) = n-\operatorname{rank}A^tA \ge n-1$$

כלומר אם $n>1$ אז 0 ע"ע

עם ריבוי גאומטרי $\ge n-1$ לכן גם

הריבוי האלגברי $\ge n-1$ לכן

$$f_A(x)=x^{n-1}g(x)$$

בגלל שהפולינום האופייני מעלתו n

ומתוקן אז הוא מהצורה:

(כך ש σ ע"ע נותר)

$$f_A(x)=x^n-\sigma x^{n-1}$$

(כי לכל מטריצה A המקדם של x^{n-1} הוא $-tr\,A$)

$\Downarrow$

$$\sigma=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \Leftarrow -\sigma=-tr\,A^tA$$

σ ע"ע כי הוא שורש של $P_A(x)$

ולכן הערכים העצמיים

הם $\sigma(A) = \{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \,,\, 0\}$.

יפה!

27

(הרחבה)

$$AA^t = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_1a_2 \cdots & & a_1a_n \\ a_1a_2 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_1a_n & \cdots & a_na_n \end{pmatrix}$$

ולכן הערך הוא כפי שציינתי

בנוסף

$$A \in \mathbb{C}^{1\times n}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{rank } A \le 1$$

כי rank A הוא מימד מרחב השורות שיש רק שורה 1

ומשפט שהוכחנו בהרצאה הוא $\text{rank } AB \le \text{rank } B$

שאלה 2

מצא את צורת ג'ורדן של המטריצה

$$A := \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \\ 0 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & n & \dots & 3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

(32 נקודות)

תשובה:

$$f_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-n & * & \cdots & * \\ & x-n & & \vdots \\ 0 & & \ddots & * \\ & & & x-n \end{vmatrix} = (x-n)^n$$

כלומר n ע"ע יחיד כשורש היחיד של הפולינום האופייני

$$A - nI = \begin{pmatrix} 0 & n-1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

שנית: $n-1$ השורות הראשונות בת"ל. מכך נובע (מ"ז n)

$1 \leq$ ריבוי הגאומטרי של n : $\dim N(A-nI) = n - \underset{(n-1)}{\mathrm{rank}}(A-nI) = 1$

ולכן ע"ע המספר : מספר הבלוקים

בצורת הג'ורדן השייכים לע"ע n הוא הריבוי

הגאומטרי של n שהוא 1 ולכן יש רק בלוק

אחד בצורת ג'ורדן של $A-nI$

מכן צורת הג'ורדן תהיה

$$\begin{pmatrix} n & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & n \end{pmatrix} = J_n(n)$$

הוכחת הטענה

יהי צ.ל. מתאפס

$$\alpha_1(0\ n-1\ \cdots\cdots\ 1)+\alpha_2(0\ 0\ n-2 \ldots)+\cdots\cdots+\alpha_{n-1}(0\ldots0\ 1)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1(n-1)=0 \Rightarrow \alpha_1=0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_2(n-2)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_2=0$$ (בהנחה $n-2\neq 0$ שכנוא קיים)

$$\Downarrow$$ וכבר ממשיכים לכן

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3\cdots=\alpha_{n-1}=0$$

ולכן (עפ"י הגדרה) השורות הראשונות בת"ל ומתקיים

מה שאמרתי

✓

שאלה 3

יהי $V=\mathbb{C}^{n\times n}$ מרחב המטריצות המרוכבות. נגדיר נגדיר מכפלה פנימית על V בצורה הבאה:

$$\langle A,B\rangle := \operatorname{tr}(AB^*)$$

לכל $A,B\in V$.

(א) הוכח שזו אכן מכפלה פנימית. (16 נקודות) לינארית ברכיב הראשון, אי שליליות, . הרמיטיות

ב. יהי $U\subseteq V$ מרחב המטריצות הסקלריות. מצא את המרחב הניצב $U^\perp$ ביחס למכפלה הפנימית שהגדרנו. (16 נקודות)

תשובה: (א) נראה שהמ"פ מקיימת לינארית ברכיב I, אי שלילית והרמיטיות:

(*) לינארית ברכיב הראשון:

$$\langle \alpha A+\beta C, B\rangle = tr((\alpha A+\beta C)B^*) = tr(\alpha AB^* + \beta\cdot CB^*)$$

$$= tr(\alpha AB^*) + tr(\beta CB^*) = \alpha\, tr(AB^*) + \beta\, tr(CB^*) = \alpha\langle A,B\rangle + \beta\langle C,B\rangle$$

(*) אי שליליות:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \qquad A^* = \bar{A}^t$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_{11}} & \cdots & \overline{\alpha_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\alpha_{1n}} & \cdots & \overline{\alpha_{nn}} \end{pmatrix}$$

מכאן נובע שאם נכפיל את המטריצות איברי האלכסון יהיו כך:

$\boxed{\langle A,A\rangle = 0 \leftrightarrow A=0}$

איברי האלכסון של AA^*

$$\begin{cases} a_{11} = \alpha_{11}\overline{\alpha_{11}} + \cdots + \alpha_{1n}\overline{\alpha_{1n}} = |\alpha_{11}|^2 + \cdots + |\alpha_{1n}|^2 \\ \vdots \\ a_{nn} = \alpha_{n1}\overline{\alpha_{n1}} + \cdots + \alpha_{nn}\overline{\alpha_{nn}} = |\alpha_{n1}|^2 + \cdots + |\alpha_{nn}|^2 \end{cases}$$

$$\langle A,A\rangle = tr(A\cdot A^*) = \sum_{i=1}^{n}\left(|\alpha_{i1}|^2 + \cdots + |\alpha_{in}|^2\right) \geq 0 \rightarrow \langle A,A\rangle \geq 0$$

(*) הרמיטיות:

$$\langle A,B\rangle = tr(A\cdot B^*) = \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_{i1}\overline{\beta_{i1}} + \cdots + \alpha_{in}\overline{\beta_{in}}\right) = \sum_{i=1}^{n}\overline{\left(\overline{\alpha_{i1}}\beta_{i1} + \cdots + \overline{\alpha_{in}}\beta_{in}\right)} = tr(B\cdot A^*) = \langle B,A\rangle$$

נכון כי $\overline{\alpha\beta} = \bar\alpha\bar\beta$ וכי $\bar{\bar\alpha} = \alpha$ $\square$

3) ב. יהי $U \subseteq V$ מרחב המטריצות הסקלריות

מצא את המרחב הניצב $U^{\perp}$ ביחס למ״פ שהגדרתי

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

$\forall u \in U \quad v \in U^{\perp} \quad \langle u, v \rangle = 0$

$$\forall v \in U^{\perp}, u \in U: \langle v, u \rangle = tr(v \cdot u^{*}) = tr(v \cdot \bar{u})$$

$$= tr\left(v \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\alpha}_1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

ניקח $v \in U^{\perp}$:

$$V = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

32/32

טוען:

$$U^{\perp} = \{ u : tr(u) = 0 \}$$

$$U \ni u = \begin{pmatrix} \bar{\beta}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\beta}_1 \end{pmatrix}$$

$$U^{\perp} \ni V = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \cdot \bar{\beta}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{nn} \bar{\beta}_1 \end{pmatrix}$$

$$tr(V \cdot U^{*}) = \alpha_{11} \cdot \bar{\beta}_1 + \cdots + \alpha_{nn} \cdot \bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_1 (\alpha_{11} + \cdots + \alpha_{nn}) = 0$$

שאלה 4

יהי V מרחב מכפלה פנימית.

א. יהיו E,F בסיסים אורתונורמלים של V, ויהי T אופרטור לינארי על V כך ש $F=\{T(v) : v\in E\}$. הוכח שהאופרטור T הוא אוניטרי. (16 נקודות)

ב. יהיו $u,v\in V$ וקטורים כך ש $\|u\|=\|v\|$. הוכח שיש אופרטור אוניטרי T על V כך ש $T(u)=v$. (16 נקודות)

תשובה:

יהי V ממ"פ מעל F תהי $T:V\to V$ יהי

טענה: אם

קיים בסיס B שעבורו $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$

$\forall i,j=1\dots n \quad \langle v_i,Tv_j\rangle=0$ אז T העתקת האפס.

הוכחת הטענה:

יהיו $u,v\in V$ אז נציג את u

עפ"י הבסיס $v=\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i,\quad u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$

אזי

$\langle \sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i,\sum_{i=1}^{n}\alpha_i Tv_i\rangle=\langle v,Tu\rangle$

$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\bar{\alpha}_j\underbrace{\langle v_i,Tv_j\rangle}_{0}=0$

עפ"י משפט שהוכח בהרצאה

נקבל ש T העתקת האפס.

$\langle v,Tu\rangle=0 \quad \forall u,v\in V \Rightarrow T=0$ "

(ההוכחה היא פשוטה $\langle Tu,Tu\rangle=0 \Rightarrow Tu=0 \quad \forall u\in V$)