

בחינה בקורס אלגברה לינארית 2 (88-113-05/08) - מועד א'

אוניברסיטת בר-אילן, יום ה', ז' אדר תשע"ב (1.3.12 למ')

מרצים: בועז צבאן, בוריס קוניאבסקי.

מתרגלים: רונן הררי, יפית נתני.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

הנחיות

א. יש לענות על 3 מתוך 4 שאלות הבחינה.

השתמש במחברת הבחינה לטייטה, ולאחר שמצאת פתרון מספק, כתוב אותו בצורה מסודרת **בגוף הבחינה**, במקום הפנוי המצוי לאחר השאלה.

אם יש צורך במקום נוסף עבור התשובה, אפשר להמשיכה בגב אותו דף.

ב. משקל כל שאלה הוא 32 נקודות. 4 נקודות מוקצות עבור סדר ונקיון הבחינה.

ג. הקף בעיגול, בטבלה הבאה, את מספרי השאלות שעליהן ענית.

ניקוד (לשימוש הבודקים)	השאלות שבחרתי (להקיף בעיגול)
	1
	2
	3
	4
	סדר ונקיון
	סה"כ

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

הבהרות:

1. גם אם הדבר לא מצויין במפורש בשאלות, כל המרחבים הוקטוריים במבחן הם ממימד סופי.

2. גם אם הדבר לא כתוב בשאלה, עליך לנמק את תשובותיך.

בהצלחה!

שאלה 1

א. הגדר: ערך עצמי של מטריצה ריבועית. (5 נקודות)

ב. מצא את הערכים העצמיים של המטריצה $A^t A$, כאשר A היא מטריצת השורה $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{1 \times n}$. (27 נקודות)

הצעה: עבוד ישירות עם ההגדרה של ערך עצמי.

תשובה:

שאלה 2

מצא את צורת ג'ורדן של המטריצה

$$\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \\ 0 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & n & \dots & 3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

(32 נקודות)

תשובה:

שאלה 3

יהי $V = \mathbb{C}^{n \times n}$ מרחב המטריצות המרוכבות. נגדיר נגדיר מכפלה פנימית על V בצורה הבאה:

$$\langle A, B \rangle := \operatorname{tr}(AB^*)$$

לכל $A, B \in V$.

א. הוכח שזו אכן מכפלה פנימית. (16 נקודות)

ב. יהי $U \subseteq V$ מרחב המטריצות הסקלריות. מצא את המרחב הניצב U^\perp ביחס למכפלה הפנימית שהגדרנו. (16 נקודות)

תשובה:

שאלה 4

יהי V מרחב מכפלה פנימית.
א. יהיו E, F בסיסים אורתונורמלים של V , ויהי T אופרטור לינארי על V כך ש $F = \{T(v) : v \in E\}$. הוכח שהאופרטור T הוא אוניטרי. (16 נקודות)
ב. יהיו $u, v \in V$ וקטורים כך ש $\|u\| = \|v\|$. הוכח שיש אופרטור אוניטרי T על V כך ש $T(u) = v$. (16 נקודות)

תשובה: