

בחינה בקורס אלגברה לינארית 2 (88-113-05/08) - מועד ב'

אוניברסיטת בר-אילן, יום א', כ"ח אדר ב' תשע"א (3.4.11 למ')

מרצים: בועז צבאן, בוריס קוניאבסקי.

מתרגלים: אוהד נבון, עדי ניב, דורון פרלמן.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

הנחיות

א. יש לענות על 3 מתוך 4 שאלות הבחינה.

השתמש במחברת הבחינה לטייטה, ולאחר שמצאת פתרון מספק, כתוב אותו בצורה מסודרת **בגוף הבחינה**, במקום הפנוי המצוי לאחר השאלה.

אם יש צורך במקום נוסף עבור התשובה, אפשר להמשיכה בגב אותו דף.

ב. משקל כל שאלה הוא 32 נקודות. 4 נקודות מוקצות עבור סדר ונקיון הבחינה.

ג. הקף בעיגול, בטבלה הבאה, את מספרי השאלות שעליהן ענית.

השאלות שבחרתי (להקיף בעיגול)	ניקוד (לשימוש הבודקים)
1	
2	
3	
4	
סדר ונקיון	
סה"כ	

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

הבהרות:

1. גם אם הדבר לא מצויין במפורש בשאלות, כל המרחבים הוקטוריים במבחן הם ממימד סופי.

2. גם אם הדבר לא כתוב בשאלה, עליך לנמק את תשובותיך.

בהצלחה!

שאלה 1

לכל n טבעי, נגדיר מטריצה

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \cdots & 4 \\ 4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 \\ 4 & \cdots & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_7^{n \times n}$$

א. חשב את $|A_n|$. התוצאה צריכה להיות נוסחה התלויה ב n . (22 נקודות)

ב. חשב את $|A_{71}|$. התוצאה צריכה להיות איבר של \mathbb{Z}_7 . (10 נקודות)

תשובה:

שאלה 2

יהיו V מרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{F} , $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי נורמלי.
א. הוכח שלכל וקטור עצמי $v \in V$ ולכל $\lambda \in \mathbb{F}$: אם $Tv = \lambda v$, אז $T^*v = \bar{\lambda}v$. (16 נקודות)

ב. הוכח שלכל $\lambda \in \mathbb{F}$, תת-המרחב $(V_\lambda)^\perp$ הוא אינוריאנטי תחת T . (16 נקודות)

תשובה:

שאלה 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ תהי}$$

לכל אחת מהאפשרויות הבאות עבור \mathbb{F} , קבע האם יש מטריצה הפיכה $P \in \mathbb{F}^{4 \times 4}$ כך ש $P^{-1}AP$ בצורת ג'ורדן.

אם התשובה חיובית, מצא P כזו וציין מהי צורת ג'ורדן המתקבלת.

א. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (10 נקודות)

ב. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (22 נקודות)

תשובה:

שאלה 4

יהי V מרחב וקטורי ממימד n . הגדר את האיזומורפיזם הטבעי (הקנוני) מ V ל V^{**} , והוכח שהוא אכן איזומורפיזם. (32 נקודות)

תשובה: