

בחינה בקורס אלגברה לינארית 2 (88-113-05/08) - מועד א'

אוניברסיטת בר-אילן, יום ה', ו' אדר א' תשע"א (10.2.11 למ')

מרצים: בועז צבאן, בוריס קוניאבסקי.

מתרגלים: אוהד נבון, עדי ניב, דורון פרלמן.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

הנחיות

א. יש לענות על 3 מתוך 4 שאלות הבחינה.

השתמש במחברת הבחינה לטייטה, ולאחר שמצאת פתרון מספק, כתוב אותו בצורה מסודרת **בגוף הבחינה**, במקום הפנוי המצוי לאחר השאלה.

אם יש צורך במקום נוסף עבור התשובה, אפשר להמשיכה בגב אותו דף.

ב. משקל כל שאלה הוא 32 נקודות. 4 נקודות מוקצות עבור סדר ונקיון הבחינה.

ג. הקף בעיגול, בטבלה הבאה, את מספרי השאלות שעליהן ענית.

| השאלות שבחרתי (להקיף בעיגול) | ניקוד (לשימוש הבודקים) |
|------------------------------|------------------------|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| סדר ונקיון | |
| סה"כ | |

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

הבהרות:

1. גם אם הדבר לא מצויין במפורש בשאלות, כל המרחבים הוקטוריים במבחן הם ממימד סופי.

2. גם אם הדבר לא כתוב בשאלה, עליך לנמק את תשובותיך.

בהצלחה!

שאלה 1

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית. הוכח את הטענות הבאות:

א. $A \cdot \text{adj}(A) = |A| I$ (12 נקודות)

ב. אם A הפיכה, אז $\text{adj}(A)$ הפיכה. (4 נקודות)

ג. אם $\text{adj}(A)$ הפיכה, אז A הפיכה. (6 נקודות)

ד. אם A הפיכה, אז $\text{adj}(\text{adj}(A)) = |A|^{n-2} A$. (10 נקודות)

תשובה:

שאלה 2

האם המטריצה הבאה לכסינה?

$$.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

אם כן, מצא מטריצה אלכסונית הדומה לה. אם לא, נמק מדוע. (32 נקודות)

תשובה:

שאלה 3

א. נסח בצורה מדוייקת את משפט ההצגה של ריס. (4 נקודות)

ב. הגדר על $\mathbb{C}_n[x]$ מכפלה פנימית, כך שהבסיס $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ יהיה אורתונורמלי. (14 נקודות)

ג. נגדיר $\varphi \in (\mathbb{C}_n[x])^*$ על ידי: לכל $p(x) \in \mathbb{C}_n[x]$,

$$\varphi(p(x)) := p'(1)$$

כלומר, גוזרים את $p(x)$ ואחר כך מציבים 1. (אין צורך להוכיח כי φ פונקציונל לינארי.)
לגבי המכפלה הפנימית שהגדרת ב(ג), מצא $q(x) \in \mathbb{C}_n[x]$ כך שלכל $p(x) \in \mathbb{C}_n[x]$, מתקיים

$$\varphi(p(x)) = \langle p(x), q(x) \rangle$$

(14 נקודות)

תשובה:

שאלה 4

נניח שלמטריצות $A, B \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ יש אותו הפולינום האופייני, וכן אותו הפולינום המינימלי. הוכח שהמטריצות A, B דומות. (32 נקודות)

תשובה: