

בחינה בקורס אלגברה לינארית 2 (88-113-05/08)

אוניברסיטת בר-אילן, י"ט שבט ה'תש"ע (3.2.2010 למ'), מועד א'

מרצים: בועז צבאן, בוריס קוניאבסקי.

מתרגלים: עדי ירדן, לואי פולב, ארז שיינר.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

הנחיות

א. לבחינה שני חלקים, ובכל חלק יש בחירה. **על כל שאלה שבחרת, יש לענות במקום הפנוי המצוי לאחריה** (יש להשתמש במחברת הבחינה לטיוטה בלבד). במקרה שלא הספיק המקום, אפשר להמשיך את התשובה בגב אותו דף (ציין זאת).

ב. הקף בעיגול, בטבלאות הבאות, את מספרי השאלות שעליהן ענית.

חלק א (שתי שאלות מתוך שלש)	ציון
1	
2	
3	

חלק ב (שלש שאלות מתוך ארבע)	ציון
4	
5	
6	
7	

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים. בהצלחה!

חלק א' (58 נקודות: 29 לכל תשובה מלאה)

ענה, בגוף השאלון, על 2 שאלות בדיוק מתוך 3 השאלות הבאות.

שאלה 1.

- א. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי, ויהי $T: V \rightarrow V$ אופרטור לינארי. הוכח:
- אם יש בסיס של V כך שהמטריצה של T לפי בסיס זה היא אלכסונית, אז לכל ערך עצמי λ של T , הריבוי האלגברי והריבוי הגאומטרי שלו שווים.
- ב. תהי A מטריצה ממשית מגודל 3×3 כך ש A אינה הפיכה, ומתקיים $\det(A-2I)=\det(A+2I)=0$. הוכח כי A לכסינה.

תשובה:

שאלה 2

א. יהיו B בסיס אורתונורמלי של מרחב מכפלה פנימית מעל שדה המרוכבים, B' בסיס אחר, ו C מטריצת המעבר מ- B ל- B' . הוכח ש B' אורתונורמלי אם ורק אם C מטריצה אוניטרית.

ב. תהי $\langle, \rangle: R^2 \times R^2 \rightarrow R$ פונקציה המוגדרת ע"י הנוסחה
$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = ax_1y_1 + (2a+b)x_1y_2 + (2a-b)x_2y_1 + 4ax_2y_2$$
לאילו ערכים של a, b מגדירה פונקציה זו מכפלה פנימית על R^2 ?

תשובה:

שאלה 3

יהיו V מרחב וקטורי, ו S תת-קבוצה של V . יהי V^* המרחב הדואלי ל- V .
נגדיר את המרחב המאפס של S : $S^0 = \{ \varphi \in V^* : \varphi(v) = 0 \text{ לכל } v \in S \}$.
 S^0 תת-מרחב של V^* , ומתקיים $S^0 = (\text{span}(S))^0$ (אין צורך להוכיח זאת).

- א. יהי U תת-מרחב של V . הוכח: $\dim U + \dim U^0 = \dim V$. [רמז: הצגה לפי בסיס].
ב. יהיו U, W תתי-מרחבים של V . הוכח: $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$.

תשובה:

חלק ב' (42 נקודות: 14 לכל תשובה מלאה)

ענה, בגוף השאלון, על 3 שאלות בדיוק מתוך 4 השאלות הבאות.

שאלה 4. הוכח או הפרך את הטענה הבאה:

תהי $A \neq 0$ מטריצה סימטרית. אזי A אינה דומה לשום מטריצה אנטי-סימטרית.

תשובה:

שאלה 5. הוכח או הפרך את הטענה הבאה:

יהי T אופרטור במרחב מכפלה פנימית מעל המרוכבים.
אם T אוניטרי וגם צמוד לעצמו, אזי $T^3 = T$.

תשובה:

שאלה 6. הוכח או הפרך את הטענה הבאה :

תהי A מטריצה כך שסכום כל עמודה שלה הוא אחד. אזי $\det(A-I)=0$.

תשובה:

שאלה 7. הוכח או הפרך את הטענה הבאה :

האיבר החופשי של הפולינום המינימלי של מטריצה הפיכה אינו 0.

תשובה:

בהצלחה!