מבחן בקורס אלגברה לינארית 1 תשס"ח (סמסטר קיץ, מועד ב)

מרצים: אלי מצרי, בועז צבאן • מתרגלים: מיטל אליהו, שי גול, אפי כהן, לואי פולב • מספר קורס: 88–112

חומר עזר: ללא חומר עזר (גם לא מחשבון).

משך הבחינה: שעתיים.

הנחיות: יש לענות על 3 שאלות. במידה שענית על יותר, ציין איזה תשובות ברצונך שיבדקו.

אם נראה לך שיש טעות בשאלה, או שהשאלה אינה מובנת, נמק זאת במחברת הבחינה, והבודק יתחשב אם ימצא את הנימוק משכנע.

שאלה 1. יהא $V = (\mathbb{Z}_2)^3$. נגדיר פונקציה $T : V \to V$ על ידי:

$$T(x, y, z) = (x^2 + y^2, y^2 + z^2, x^2 + z^2)$$

לכל $(x, y, z) \in V$.

(א) הוכח ש T העתקה לינארית.

(ב) מצא בסיס ל $\mathrm{im}(T)$ ול $\ker(T)$.

(ג) מצא את מספר האיברים ב $\mathrm{im}(T)$ וב $\ker(T)$.

(ד) נסמן ב B את איחוד הבסיסים שמצאת בסעיף (ב). הוכח ש B בסיס של V.

(ה) חשב את $[T]_B^S$, כאשר S הוא הבסיס הסטנדרטי של V.

שאלה 2. יהיו V, W מרחבים וקטוריים ממימד סופי מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. תהא $T : V \to W$ העתקה לינארית.
הוכח: לכל בסיס E עבור V ולכל בסיס F עבור W, מתקיים $\dim(\mathrm{im}\, T) = \mathrm{rank}([T]_F^E)$.

שאלה 3. נגדיר העתקה לינארית $R : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ על ידי:

$$R(x, y, z, w) = (x + y + 2z, -y - z + w, 2x + 2z + 2w, y + z - w)$$

לכל $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$. נסמן $V = \{T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) : TR = O\}$.

(א) מצא את $\ker(R)$ ואת $\mathrm{im}(R)$.

(ב) הוכח ש V תת־מרחב של $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$.

(ג) מהו $\dim(V)$? נמק.

שאלה 4. יהיו V מרחב וקטורי ממימד סופי, ו $T : V \to V$ העתקה לינארית. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

(א) $\mathrm{span}(\ker(T) \cup \mathrm{im}(T)) = V$.

(ב) $\mathrm{span}(\ker(T) \cup \mathrm{im}(T)) = \ker(T) + \mathrm{im}(T)$.

(ג) $\mathrm{span}(\ker(T) \cup \mathrm{im}(T)) = \ker(T) \cup \mathrm{im}(T)$.

(ד) $\mathrm{span}(\ker(T) \cup \mathrm{im}(T)) = \ker(T) \oplus \mathrm{im}(T)$.

בהצלחה!