מבחן בקורס אלגברה לינארית 1 תשס"ח (סמסטר קיץ, מועד א)

מרצים: אלי מצרי, בועז צבאן • מתרגלים: מיטל אליהו, שי גול, אפי כהן, לואי פולב • מספר קורס: 88–112

חומר עזר: ללא חומר עזר (גם לא מחשבון).

משך הבחינה: שעתיים.

הנחיות: יש לענות על 3 שאלות. במידה שענית על יותר, ציין איזה תשובות ברצונך שיבדקו.

אם נראה לך שיש טעות בשאלה, או שהשאלה אינה מובנת, נמק זאת במחברת הבחינה, והבודק יתחשב אם ימצא את הנימוק משכנע.

שאלה 1.

(א) הוכח את המשפט האומר, שלכל זוג מטריצות A, B שמכפלתן AB מוגדרת, מתקיים
$$\operatorname{rank}(AB) \le \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}.$$

(ב) ספק הוכחה קצרה לכל אחת מהטענות הבאות (היעזר במשפטים ידועים):

(i) יהיו A, B מטריצות שמכפלתן AB מוגדרת, וכך שלפחות אחת מהן הפיכה. אזי:
$$\operatorname{rank}(AB) = \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}.$$

(ii) לכל $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$: $\dim\{v \in \mathbb{F}^n : Av = \vec{0}\} + \operatorname{rank}(A) = n$.

שאלה 2. יהי $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_3$, ותהי $T : \mathbb{F}_2[x] \to \mathbb{F}^3$ ההעתקה הלינארית המקיימת
$$\begin{aligned} T(1+2x+x^2) &= (1,1,2) \\ T(1+x+2x^2) &= (2,1,1) \\ T(2+x+x^2) &= (1,2,1) \end{aligned}$$

(א) הוכח ש T איזומורפיזם.

(ב) חשב את $[T^{-1}]_{S_1}^{S_2}$, כאשר S_1 הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}_2[x]$, ו S_2 הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^3$.

(ג) מהו $T^{-1}(a,b,c)$ עבור $a,b,c \in \mathbb{F}$?

שאלה 3. הערה: בהרצאה הוכחנו שאם $AB = I$, אז $BA = I$ וכן $B = A^{-1}$ ו $A = B^{-1}$.
בשאלה זו **אין** להשתמש במשפט זה.

יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, כך שמתקיים $AB = I$. נגדיר $T : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}^{n\times n}$ על ידי: $T(X) = BX$ לכל $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(א) הוכח ש T איזומורפיזם.

(ב) היעזר בסעיף (א) להוכיח ש B הפיכה.

שאלה 4.

(א) נסח והוכח את משפטון ההחלפה של שטייניץ.

(ב) נתון שאחת הקבוצות הבאות בסיס של $\mathbb{R}^3$ והשניה פורשת את $\mathbb{R}^3$:
$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}, C = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\}.$$
לכל $v \in B$ בנפרד, מצא (בלי הוכחה) $w \in C \setminus B$ כך ש $(B \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ בסיס.

(ג) הוכח: לכל $v \in B$, יש $w_1, w_2 \in C \setminus B$ ומטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ שעמודותיה הן v, w_1, w_2, כך שההעתקה הלינארית $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי $T(x) = Ax$ היא על.

בהצלחה!