בס"ד

מבחן פתור - 1 אוניב' בר-אילן, סמסטר א' תשנ"ה מועד א'

(88-110) אלגברה לינארית \ ד"ר רון עדין

בחינת סוף סמסטר א' (מועד א')

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי עזר אסורים או יתפס בהעתקה יענש בחומרה עד כדי הרחקתו מהאוניברסיטה.

* זמן הבחינה: שעתיים.
* אין להשתמש בחומר-עזר, פרט למחשב-כיס פשוט.
* יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות. אם פתרת 5 שאלות, נא סמן אילו 4 מיועדות לבדיקה - אחרת תיבדקנה 4 הראשונות.
* נא לכלול את כל החישובים במחברת הבחינה. קטעי-טיוטה שאינם מיועדים לבדיקה אפשר למחוק בקו; מומלץ להשתמש בצד אחד של הדף לגרסה סופית "נקיה", ובצד השני לטיוטה.
* ניקוד מלא "ינתן לתשובה הכוללת את כל ההסברים והחישובים הנחוצים.

בהצלחה!

(1) א. הגדר: משתנים חפשיים.

ב. עבור אילו ערכי c יש למערכת המשוואות הבאה (מעל $\mathbb{R}$) פתרון יחיד / אין פתרון / אינסוף פתרונות? במקרים בהם יש אינסוף פתרונות - רשום אותם.

$$\begin{cases} x + y + cz = c \\ cx + cy + z = 1 \\ x + cy + cz = 2 \end{cases}$$

(2) א. יהי $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ האופרטור הלינארי המוגדר ע"י:

$$T(x,y,z) = (x+y,\ y+z,\ 2x-2z).$$

מצא בסיס לגרעין ולתמונה של T.

ב. מצא בסיס סדור E ל-$\mathbb{R}^3$ כך ש-:

$$[T]_E^E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

(הפתרון אינו יחיד).

(3) א. הגדר: מטריצה הפיכה, מטריצה משוחלפת.

ב. הוכח כי עבור מטריצה הפיכה A:

$$(I+A)^{-1} = I + A^{-1} \iff A^2+A+I=0.$$

ג. מצא מטריצה $A\in\mathbb{R}^{2\times2}$ המקיימת $A^2+A+I=0$, ובדוק עבורה את טענת סעיף ב'.
(רמז: נסה $A=\begin{pmatrix}a&1\\-1&d\end{pmatrix}$.)

(4) א. הוכח כי $W+W=W$ לכל תת-מרחב W של מרחב וקטורי V.

ב. הוכח כי, עבור $V=(\mathbb{Z}_p)^n$: תת-קבוצה W של V היא תת-מרחב של V (מעל $\mathbb{Z}_p$) אםם W סגורה לחיבור ולא ריקה.

ג. הראה (ע"י דוגמא) שטענת סעיף ב' אינה נכונה עבור $V=\mathbb{R}^n$ (מעל $\mathbb{R}$).

(5) א. הגדר: תלות לינארית, פרישה לינארית.

ב. האם הפולינומים הבאים (מעל $\mathbb{R}$) תלויים לינארית?

$$1+x+x^3,\quad 1-2x+2x^4,\quad 3-x+x^4,\quad 1-x^3-x^4$$

ג. מצא בסיס לתת-המרחב של $\mathbb{R}[x]$ הנפרש ע"י הפולינומים הנ"ל.

(מועד גבאון)

אלגברה לינארית, א"א תשנ"ה, ד"ר עדין.

תקציר פתרון*

(* ההגדרות נמצאות בהרצאה.)

① ב.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & c & c \\ c & c & 1 & 1 \\ 1 & c & c & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-cR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & c & c \\ 0 & 0 & 1-c^2 & 1-c^2 \\ 0 & c-1 & 0 & 2-c \end{array}\right)$$

עבור $c-1=0$ (כלומר $\boxed{c=1}$) מתקבלת המערכת עם שורה שלישית $(0\ 0\ 0 \,|\, 1)$, ולכן <u>אין פתרון</u>.

עבור $c-1\neq 0$, נכפול את R_2 ואת R_3 ב $\frac{1}{c-1}$ ($1-c^2=(1+c)\underbrace{(1-c)}_{-(c-1)}$) נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & c & c \\ 0 & 0 & -(1+c) & -(1+c) \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{2-c}{c-1} \end{array}\right) \xrightarrow[-R_2]{R_1-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & c & \frac{c^2-2}{c-1} \\ 0 & 0 & c+1 & c+1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2-c}{c-1} \end{array}\right)$$

עבור $c+1=0$ (כלומר $\boxed{c=-1}$) מתקבלת המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

נסמן $z=t$, אזי $x-z=\frac{1}{2} \Leftarrow x=\frac{1}{2}+z=\frac{1}{2}+t$. $y=\frac{-3}{2}$; והפתרון במקרה זה:

$$\underline{(x,y,z)=\left(\tfrac{1}{2}+t,\ \tfrac{-3}{2},\ t\right)\quad (t\in\mathbb{R})}$$

נותר המקרה שבו $c+1\neq 0$. נכפול את R_2 ב $\frac{1}{c+1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & c & \frac{c^2-2}{c-1} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2-c}{c-1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & c & \frac{c^2-2}{c-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2-c}{c-1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-cR_3} \left(\begin{array}{c|c} I & \begin{matrix} \frac{c-2}{c-1} \\ -\frac{c-2}{c-1} \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

כלומר במקרה $\boxed{c\notin\{1,-1\}}$ יש <u>פתרון יחיד</u> (והוא $(x,y,z)=\left(\frac{c-2}{c-1},-\frac{c-2}{c-1},1\right)$).

<u>הערה:</u> לא נתבקשנו לרשום את הפתרון במקרה של פתרון יחיד; ולכן אפשר היה לסיים מוקדם יותר לפני.

② א. I <u>מציאת בסיס ל $\ker T$:</u> $(x,y,z)\in\ker T \Leftrightarrow (x+y,\ y+z,\ 2x-2z)=(0,0,0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -x=y \\ -y=z \\ (2x=2z) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad (x,y,z)=(x,-x,x)=x(1,-1,1)$$

לכן $\ker T=\mathrm{Span}\overbrace{\{(1,-1,1)\}}^{B_1}$. B_1 קב' עם וקטור אחד שאינו אפס, לכן בת"ל, ולכן בסיס עבור $\ker T$.

II <u>מציאת בסיס ל $\mathrm{Im}\,T$:</u> $T(x,y,z)=(x+y,\ y+z,\ 2x-2z)=x(1,0,2)+y(1,1,0)+z(0,1,-2)$.

לכן $\mathrm{Im}\,T=\mathrm{Span}\{(1,0,2),(1,1,0),(0,1,-2)\}$. נמצא בסיס למרחב הנפרש ע"י 3 הוקטורים בעזרת דירוג שורות:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ניקח כבסיס $B_2 = \{(1,0,2),(0,1,-2)\}$. [הערה: היות שלא החלפנו שורות בתהליך הדירוג, אפשר לקחת כבסיס גם את הוקטורים המקוריים המתאימים $\{(1,0,2),(1,1,0)\}$.]

ב. <u>דרך מתוחכמת:</u> (העמודה הראשונה במטריצה היא $\vec{0}$, לכן הוקטור הראשון שייך לגרעין. כעת, אם v_1 ו-v_2 פורשים את התמונה של T, אז בפרט $Tv_1=\alpha v_1+\beta v_2$ וכן $Tv_2=\gamma v_1+\delta v_2$, ועבור בסיס כזה, $[T]_E^E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\alpha&\gamma\\0&\beta&\delta\end{pmatrix}$).

ניקח $E \doteq \underset{\text{בסיס לגרעין}}{B_1} \cup \underset{\text{בסיס לתמונה}}{B_2} = \{(1,-1,1),(1,0,2),(0,1,-2)\}$. (הערה: פעמים רבות סעיף של שאלה מסתמך על סעיפים קודמים!).

צריך להראות ש-E בסיס. ב-E יש 3 איברים; לכן מספיק להראות שהיא בת"ל. נראה לפי דירוג שורות.

$$\begin{pmatrix}\boxed{1}&-1&1\\1&0&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&\boxed{1}&1\\0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&0&-3\end{pmatrix} \checkmark$$

(קיבלנו 3 מדרגות, איברי האלכסון $\neq 0$)

נחשב $[T]_E^E$:

$$T(1,-1,1)\overset{\text{מהג' }T}{=}(0,0,0)=0\cdot(1,-1,1)+0(1,0,2)+0(0,1,-2).$$
$$T(1,0,2)=(1,2,-2)=0\cdot(1,-1,1)+1\cdot(1,0,2)+2(0,1,-2).$$
$$T(0,1,-2)=(1,-1,4)=0\cdot(1,-1,1)+1(1,0,2)+(-1)(0,1,-2)$$

(מי שלא מצליח להגיע להצגה ישירות - יכול לחשב אותה כמו שלמדנו). לכן,

$$[T]_E^E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&2&-1\end{pmatrix} //$$

<u>דרך ישירה:</u> נסמן $E=\{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6),(\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9)\}$, צריך להתקיים

אפשר לבחור t כרצוננו, למשל $t=1$.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(t,-t,t)\overset{(k)}{\Leftarrow}T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=0(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+0(\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)+0(\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9)=0$$
$$(\alpha_4+\alpha_5,\alpha_5+\alpha_6,2(\alpha_4-\alpha_6))=T(\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)=0(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+x(\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)+y(\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9)=(x\alpha_4+y\alpha_7,x\alpha_5+y\alpha_8,x\alpha_6+y\alpha_9)$$
$$(\alpha_7+\alpha_8,\alpha_8+\alpha_9,2(\alpha_7-\alpha_9))=T(\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9)=0(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+z(\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)+w(\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9)=(z\alpha_4+w\alpha_7,z\alpha_5+w\alpha_8,z\alpha_6+w\alpha_9)$$

(קיבלנו מערכת משוואות עם הנעלמים $\alpha_4,\dots,\alpha_9$ (ופרמטרים x,y,z,w) [את $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כבר מצאנו].

$$\begin{cases}\alpha_4(1-x)+\alpha_5-y\alpha_7=0\\ \alpha_5(1-x)+\alpha_6-y\alpha_8=0\\ 2\alpha_4-(2+x)\alpha_6-y\alpha_9=0\\ -z\alpha_4+(1-w)\alpha_7+\alpha_8=0\\ -z\alpha_5+(1-w)\alpha_8+\alpha_9=0\\ -z\alpha_6+2\alpha_7-(2+w)\alpha_9=0\end{cases}\overset{\text{ניסוח שקול}}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}\alpha_4+\alpha_5=x\alpha_4+y\alpha_7\\ \alpha_5+\alpha_6=x\alpha_5+y\alpha_8\\ 2\alpha_4-2\alpha_6=x\alpha_6+y\alpha_9\\ \alpha_7+\alpha_8=z\alpha_4+w\alpha_7\\ \alpha_8+\alpha_9=z\alpha_5+w\alpha_8\\ 2\alpha_7-2\alpha_9=z\alpha_6+w\alpha_9\end{cases}$$

נפתור בעזרת מטריצה

$$\begin{array}{c}\begin{matrix}\alpha_4&\alpha_5&\alpha_6&\alpha_7&\alpha_8&\alpha_9\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1-x&1&0&-y&0&0\\0&1-x&1&0&-y&0\\\boxed{2}&0&-(2+x)&0&0&-y\\-z&0&0&1-w&1&0\\0&-z&0&0&1-w&1\\0&0&-z&2&0&-(2+w)\end{pmatrix}\end{array}\xrightarrow[2R_4+zR_3]{2R_1-(1-x)R_3}\begin{pmatrix}0&\boxed{2}&(1-x)(2+x)&-2y&0&y(1-x)\\0&1-x&1&0&-y&0\\2&0&-(2+x)&0&0&-y\\0&0&-z(2+x)&z(1-w)&2&-yz\\0&-z&0&0&1-w&1\\0&0&-z&2&0&-(2+w)\end{pmatrix}\xrightarrow[2R_5+zR_1]{2R_2-(1-x)R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & (1-x)(2+x) & -2y & 0 & y(1-x) \\ 0 & 0 & 2-(1-x)^2(2+x) & -2(1-x)y & 2y & -y(1-x)^2 \\ 2 & 0 & -(2+x) & 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & -z(2+x) & 2(1-w) & 2 & -yz \\ 0 & 0 & z(1-x)(2+x) & -2zy & 2(1-w) & 2-zy(1-x) \\ 0 & 0 & -z & 2 & 0 & -(2+w) \end{bmatrix}$$

מתחיל להיות מסובך, ואנו צריכים רק פתרון אחד, לכן נבדוק מקרים פרטיים שנוחים לנו.

ננסה $x=-2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -2y & 0 & 3y \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -6y & 2y & -9y \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-w) & 2 & -yz \\ 0 & 0 & 0 & -2yz & 2(1-w) & 2-3yz \\ 0 & 0 & -z & 2 & 0 & -(2+w) \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_6+zR_2} \begin{bmatrix} - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 4-6yz & 2yz & -2(2+w)-9yz \end{bmatrix}$$

גם זה מסובך (אם כי יש יחידי סגולה שמצליחים בדרך זו). [אם ננחש גם את w,z,y סביר שלא יהיה פתרון]

עכ"פ, למטרת מבחן לא רצוי לנסות דרך כזאת כאשר יש יותר מדי משתנים (יותר מדי "פרמטרים").

מסקנה: במקרה כזה, אם לא מצליחים בדרך מתוחכמת, רצוי לבחור שאלה אחרת.

3. ב. "⇐" נניח $A^2+A+I=0$. צ"ל $(I+A)^{-1}=I+A^{-1}$, כלומר $(I+A)(I+A^{-1})=I=(I+A^{-1})(I+A)$.

$$(I+A)(I+A^{-1}) \underset{\text{דיסט'}}{=} I(I+A^{-1})+A(I+A^{-1}) \underset{\substack{\text{תכונות } I \\ \text{ודיסט'}}}{=} I+A^{-1}+AI+\underset{\substack{\text{תכונות } I \\ A^{-1}\ ''}}{AA^{-1}} = I+A^{-1}+A+I = \star$$

נכפול את שני האגפים של $A^2+A+I=0$ ב A^{-1} לקבל (משתמשים בדיסט' ובתכונות $A^{-1},I,0$) $A+I+A^{-1}=0$ לכן $A^{-1}+A+I=0$ ולכן $\star=I$ כדרוש. באותו אופן, $(I+A^{-1})(I+A)=I$. ✓

"⇒" נניח $(I+A)^{-1}=I+A^{-1}$. אז $I \underset{\text{מההנחה}}{=} (I+A)(I+A^{-1}) \underset{\text{כמו קודם}}{=} I+A^{-1}+A+I$. (נחסר I משני האגפים לקבל $A^{-1}+A+I=0$. נכפול ב A את שני האגפים (ונשתמש בדיסט' ובתכונות $A^{-1},I,0$) לקבל $I+A^2+A=0$ ולכן $A^2+A+I=0$. ✓

ג. מי שזוכר את התרגיל שנתתי בזמנו, יודע מייד שאפשר לבחור $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. אבל המטלה רוצה דרך מנומקת (בעזרת הרמז). אז לעבודה: ננסה $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & d \end{pmatrix} \Leftarrow A^2=\begin{pmatrix} a^2-1 & a+d \\ -a-d & -1+d^2 \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow A^2+A+I=\begin{pmatrix} a^2+a & a+d+1 \\ -(a+d+1) & d^2+d \end{pmatrix} \overset{\text{דרוש}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן בפרט $\begin{cases} a+d+1=0 \\ a(a+1)=0 \end{cases}$

$a=0 \Rightarrow d=-1$

$a=-1 \Rightarrow d=0$

שני הפתרונות מתאימים לדרישה. ניקח למשל את הראשון $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. א. דרך "מתוחכמת": (1) לפי משפט, אם $W_1, W_2 \subseteq V$ תת-מ"ו, אז $Span(W_1 \cup W_2)=W_1+W_2$.

(2) — " — , אם $W \subseteq V$ תת-מ"ו, אז $Span(W)=W$.

לכן, $W+W \overset{(1)}{=} Span(W \cup W) = Span(W) \overset{(2)}{=} W$. ✓

דרך ישירה: מראים הכלה דו-כיוונית. "$\supseteq$": לכל $w\in W$, $w=\overset{W}{w}+\overset{W}{\vec0}\in W+W$ (0 שייך לכל תת-מ"ו). ✓.

"$\subseteq$": לכל $w_1,w_2\in W$, $w_1+w_2\in W$ (כי W תת-מ"ו). ✓.

ב. "$\Leftarrow$" כל תת-מרחב הוא סגור לחיבור ולא ריק (ראינו בהרצאה).

"$\Rightarrow$" "חסרה" תכונת הסגירות לכפל בסקלר. נראה שהיא מתקיימת. יהי $v\in W$ ויהי $\bar n\in\mathbb{Z}_p$ סקלר. אזי

$$\bar n\cdot v=(\underbrace{\bar1+\dots+\bar1}_{n\ \text{פעמים}})v\underset{\text{דיסט'}}{=}\bar1v+\dots+\bar1v\underset{\text{תכונת 1 במ"ו}}{=}\underset{W}{v}+\dots+\underset{W}{v}\in W$$

כי W סגורה לחיבור.

(עבור $\bar n=\bar0$ זה טריוויאלי $\bar0v=\vec0\in W$ תכונות במ"ו)

[אמורים להיות יותר פורמליים, ולהשתמש באינדוקציה על $p>\bar n\geq0$]. ✓.

ג. צריך למצוא $W\subseteq\mathbb{R}^n$ סגורה לחיבור ולא ריקה, שאינה תת-מרחב, כלומר אינה סגורה לכפל בסקלר. אפשר לקחת את $W:=\mathbb{Z}^n\subseteq\mathbb{R}^n$ (כלומר $W=\{(z_1,\dots,z_n):z_i\in\mathbb{Z}\}$). $\vec0\in\mathbb{Z}^n$, לכן אינה ריקה, וכן $\mathbb{Z}^n$ סגורה לחיבור, שכן סכום מס' שלמים הוא מס' שלם. אבל, למשל, $\frac12\cdot\underset{\mathbb{Z}^n}{(1,0,\dots,0)}=\underset{\notin\mathbb{Z}^n}{(\frac12,0,\dots,0)}$, כ $\frac12\in\mathbb{R}$.

יש עוד דוגמאות למכביר, למשל $\mathbb{Q}^n\subseteq\mathbb{R}^n$ (כי $\pi\cdot(1,0,\dots)\notin\mathbb{Q}^n$), או $\mathbb{P}^n\subseteq\mathbb{R}^n$, כאשר $\mathbb{P}=\{x\in\mathbb{R}:x\geq0\}$ (כי $-1(1,0,\dots)\notin\mathbb{P}^n$) וכו'.

5) ב. נבדוק את התלות של וקטורי הקואורדינטות לפי הבסיס הסטנדרטי (תת-קב' א) ; נשתמש בדירוג שורות.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4-R_1]{R_2-R_1,\ R_3-3R_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & -1 & 2\\ 0 & -4 & 0 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-3R_4,\ R_4-4R_4}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[(-1)R_4]{R_3-R_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

התקבלה שורת אפסים, לכן הוקטורים ת"ל.

ג. נבדוק שהוקטורים הנותרים בת"ל, והם יהוו בסיס למרחב הנפרש [ומי שרוצה, יקח את f_1,f_2,f_4 מהקב' המקורית].

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1 & x & x^2 & x^3 & x^4\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\end{pmatrix}\end{array}$$

קיבלנו צורה מדורגת, לכן הוקטורים בת"ל.

נכתוב את הבסיס כפולינומים: $\{1+x+x^3,\ x+2x^3+x^4,\ 5x^3+5x^4\}$. //

— תם ונשלם —