האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה באלגברה לינארית 2 (80135) - מועד ב', סמסטר ב' תשע"א, 19.7.2011

מרצים: פרופ' יעקב ורשבסקי, ד"ר יבגני סטרחוב

משך הבחינה: שלוש שעות.
כל חומר עזר אסור בשימוש.
קראו בעיון את ההוראות. יש לצטט במדויק כל טענה בה אתם משתמשים. אין להסתמך על טענות שקולות לטענות אותן אתם מתבקשים להוכיח.

חלק א (40 נקודות) - ענו על שתיים מהשאלות 1-3.

שאלה 1 (20 נקודות)

א. (15 נקודות) תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית, $v_1, \ldots, v_n$ וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים שונים $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. הוכיחו ש-$(v_1, \ldots, v_n)$ בלתי תלויים לינארית.

ב. (5 נקודות) יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי. הוכיחו שאם להעתקה לינארית $T : V \to V$ יש $\dim V$ ערכים עצמיים שונים אזי T לכסינה.

שאלה 2 (20 נקודות)

א. (12 נקודות) יהי φ פונקציונל לינארי על מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי V. הוכיחו כי קיים $v \in V$ יחיד כך ש-$\varphi(u) = \langle u, v \rangle$ לכל $u \in V$. שימו לב: יש להוכיח קיום ויחידות.

ב. (8 נקודות) יהיו V, U, W מרחבי מכפלה פנימית ממימד סופי. יהיו $T : V \to W$ ו-$S : U \to V$ העתקות לינארית. הוכיחו ש-$(T^*)^* = T$ וכן ש-$(TS)^* = S^*T^*$

שאלה 3 (20 נקודות)

א. (6 נקודות) תהי $N : V \to V$ העתקה לינארית נילפוטנטית. הוכיחו של-$I + N$ יש שורש ריבועי.

ב. (14 נקודות) יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$. תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית הפיכה. הוכיחו של-T יש שורש ריבועי.

חלק ב (30 נקודות) ־ ענו על שתיים מהשאלות 4־6.

שאלה 4 (15 נקודות)

תהי $A \in M_3(\mathbb{R})$ נתונה על־ידי $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

א. (10 נקודות) לכסנו אורתוגונלית את A. כלומר, מצאו מטריצה **אורתוגונלית** $O \in M_3(\mathbb{R})$ ומטריצה אלכסונית $D \in M_3(\mathbb{R})$ כך ש־$O^{-1} \cdot A \cdot O = D$.

ב. (5 נקודות) חשבו את הפולינום האופייני של A^{23}.

שאלה 5 (15 נקודות)

יהי $V = M_2(\mathbb{R})$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית המוגדרת על־ידי $T(A) = A^t$.

א. (7 נקודות) מצאו את הפולינום האופייני של T.

ב. (8 נקודות) מצאו את הערכים העצמיים של T. עבור כל אחד מהערכים העצמיים מצאו בסיס למרחב הנפרש על ידי הוקטורים העצמיים של T. האם T לכסינה?

שאלה 6 (15 נקודות)

נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

מצאו מטריצה J בצורת ז'ורדן ומטריצה הפיכה P כך ש־$P^{-1}AP = J$.

(מציאת צורת ז'ורדן J ללא המטריצה המז'רדנת P תזכה ב־5 נקודות).

חלק ג (30 נקודות) - ענו על 5 מהשאלות 7-12.

שאלה 7 (6 נקודות)

יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$ ותהי $T : V \to V$ העתקה לינארית נורמלית. נניח ש-$T^{2011} = 0$. הוכיחו כי $T = 0$.

שאלה 8 (6 נקודות)

יהי V מרחב מכפלה פנימית סוף מימדי. תהי

$$T : V \to V$$

העתקה לינארית. הוכיחו ש-$(\mathrm{Im}T)^{\perp} = \ker(T^*)$.

שאלה 9 (6 נקודות)

תהי $A \in M_4(\mathbb{C})$ המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \sqrt{2}i & \sqrt{2}i \\ 4 & 5 & \sqrt{2}i & \sqrt{2}i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ הערכים העצמיים של A כולל ריבוי. חשבו את $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ ואת $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$.
(רמז: ניתן לפתור כמעט בלי חישובים.)

שאלה 10 (6 נקודות)

יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$. תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית צמודה לעצמה.
עבור כל אחת מהטענות רישמו אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו בקצרה.

א. קיים $\lambda \in \mathbb{C}$ כך ש-$T - \lambda I$ אינה הפיכה.

ב. $T - \lambda I$ הפיכה לכל $\lambda \in \mathbb{C}$ המקיים $|\lambda| \neq 1$.

ג. $T - \lambda I$ הפיכה לכל $\lambda \in \mathbb{C}$ המקיים $\lambda \notin \mathbb{R}$.

שאלה 11 (6 נקודות)

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי. תהיינה

$$S, T : V \to V$$

העתקות מתחלפות. הוכיחו ש-$\ker(S)$ הוא תת־מרחב T-אינווריאנטי.

שאלה 12 (6 נקודות)

תהיינה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו-$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. האם A ו-B דומות? נמקו.

בהצלחה!