האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה באלגברה לינארית 2 (80135) - מועד א', סמסטר ב' תשע"א, 16.6.2011

מרצים: פרופ' יעקב ורשבסקי, ד"ר יבגני סטרחוב

משך הבחינה: שלוש שעות.
כל חומר עזר אסור בשימוש.
קראו בעיון את ההוראות. יש לצטט במדויק כל טענה בה אתם משתמשים. אין להסתמך על טענות שקולות לטענות אותן אתם מתבקשים להוכיח.

חלק א (40 נקודות) - ענו על שתיים מהשאלות 1-3.

שאלה 1 (20 נקודות)

הוכיחו את משפט קיילי המילטון: נניח ש-V הוא מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$ ו-$T : V \to V$ העתקה לינארית. נסמן ב-f_T את הפולינום האופייני של T. אזי $f_T(T) = 0$.

שאלה 2 (20 נקודות)

א. (15 נקודות) הוכיחו את משפט גרם-שמידט: יהי V מרחב מכפלה פנימית. תהי $(v_1, \ldots, v_m)$ קבוצה בלתי תלויה לינארית של וקטורים ב-V. אזי קיימת קבוצה אורתונורמלית $(e_1, \ldots, e_m)$ של וקטורים ב-V כך ש-

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j) = \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_j)$$

עבור $j = 1, \ldots, m$.

ב. (5 נקודות) הוכיחו שלכל מרחב מכפלה פנימית סוף מימדי יש בסיס אורתונורמלי.

שאלה 3 (20 נקודות)

נניח ש-V הוא מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$ ו-$T : V \to V$ העתקה לינארית. הוכיחו כי T העתקה נורמלית אם ורק אם T לכסינה בבסיס אורתונורמלי.

חלק ב (30 נקודות) - ענו על שתיים מהשאלות 4-6.

שאלה 4 (15 נקודות)

תהי $A \in M_4(\mathbb{R})$ נתונה על-ידי: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

א. (10 נקודות) לכסנו אורתוגונלית את A. כלומר, מצאו מטריצה **אורתוגונלית** $O \in M_4(\mathbb{R})$ ומטריצה אלכסונית $D \in M_4(\mathbb{R})$ כך ש-$O^{-1} \cdot A \cdot O = D$.

ב. (5 נקודות) חשבו את $\mathrm{trace}(A^{2011})$.

שאלה 5 (15 נקודות)

נגדיר העתקה $T : \mathbb{C}_2[x] \to \mathbb{C}_2[x]$ על-ידי: $T(p(x)) = p'(x) + p(x+1)$ (אם $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ אז $p'(x) = 2a_2x + a_1$).

א. (5 נקודות) מצאו את הפולינום האופייני $f_T(x)$ של T.

ב. (5 נקודות) מצאו את הערכים העצמיים של T. עבור כל אחד מהערכים העצמיים מצאו בסיס למרחב הנפרש על ידי הוקטורים העצמיים של T. האם T לכסינה?

ג. (5 נקודות) מצאו את צורת ג'ורדן של T. נמקו. (אין צורך למצוא בסיס בו T מיוצגת על-ידי מטריצת ג'ורדן אלא רק את הצורה עצמה.)

שאלה 6 (15 נקודות)

יהי $V = \mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. נגדיר מישור ב-V על-ידי

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \; x - 2z = 0 \right\}.$$

U תת-מרחב של V. תהי $P_U : V \to V$ ההטלה האורתוגונלית על U.

א. (7 נקודות) מצאו את המטריצה שמייצגת את P_U לפי הבסיס הסטנדרטי של V.

ב. (4 נקודות) מצאו את הערכים העצמיים של P_U. עבור כל אחד מהערכים העצמיים מצאו בסיס למרחב הנפרש על ידי הוקטורים העצמיים של P_U. האם P_U לכסינה?

ג. (4 נקודות) מה היא הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ שנמצאת על המישור U?

מה המרחק בין p ל-U?

חלק ג (30 נקודות) ־ ענו על 5 מהשאלות 7־12.

שאלה 7 (6 נקודות)

תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית. נניח כי $A^{10} = I$. הוכיחו כי $A^2 = I$.

שאלה 8 (6 נקודות)

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי. תהי $P : V \to V$ העתקה לינארית המקיימת $P^2 = P$.
הוכיחו:

$$V = \ker P \oplus \mathrm{Im} P.$$

שאלה 9 (6 נקודות)

מהו המספר המקסימלי של מטריצות נילפוטנטיות 3×3 מעל $\mathbb{C}$ שאף שתיים מהן אינן דומות?
נמקו.

שאלה 10 (6 נקודות)

יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$. תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית אוניטרית.
הוכיחו ש־

$$|\langle Tv, v\rangle| \leq \|v\|^2$$

לכל $v \in V$.

שאלה 11 (6 נקודות)

הוכיחו או תנו דוגמא נגדית: יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל השדה $\mathbb{F}$. תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית ויהי $W \subseteq V$ תת־מרחב T־אינווריאנטי. אזי קיים תת־מרחב $U \subseteq V$ גם כן T־אינווריאנטי כך ש־$V = W \oplus U$.

שאלה 12 (6 נקודות)

הוכיחו או תנו דוגמא נגדית: יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$. תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית. אם כל הערכים העצמיים של T הם ממשיים, אז $T = T^*$.

בהצלחה!