

80. 135
12/8/10

האוניברסיטה העברית בירושלים.

החוג למתמטיקה.

מסך המבחן: 3 שעות

מועד ב' - 12/8/10

סמסטר ב' - תש"ע

המרצים: פרופ' צ. גלנדר, פרופ' צ. סלע.

אלגברה לינארית (2) 80135

חלק I (35 נקודות) ענו על 5 מתוך 6 השאלות 1 – 6

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. אם, לדעתכם, הטענה היא נכונה, נמקו בקצרה (נסחו במדויק את המשפטים המתאימים).
אחרת, תנו דוגמה נגדית.

תשובה נכונה בעלת נימוק שגוי (או בלי נימוק) לא תתקבל!!!

(1) יהי V מרחב וקטורי ותהי $P: V \rightarrow V$ טרנספורמציה המקיימת
 $P^2 = P$. אזי: $V = \ker P \oplus \text{Im } P$

(2) לא קיימת מטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ כך ש: $AA^* + I = \frac{3}{2}A$

(3) תהיינה T, S . טרנספורמציות נורמליות ממרחב V לעצמו. אזי TS היא טרנספורמציה נורמלית.

(4) תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ נילפוטנטית מסדר $\frac{n}{4} < n$. אזי לא קיימת מטריצה $B \in M_n(\mathbb{C})$ כך ש: $B^3 = A$

(5) יהי V מרחב אוניטרי, $T: V \rightarrow V$. אזי: $(\text{Im } T)^\perp = \ker T^*$

(6) תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה נילפוטנטית. אזי דומה ל A^t



חלק II (32 נקודות) ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות 7 – 9.

אין להסתמך על משפטים שקולים או משפטים הנובעים מהטענה שבשאלה.

(7) יהי V מרחב אוניטרי ממימד סופי, ויהיה $\varphi \in V^*$ פונקציונל לינארי. אזי קיים וקטור $u \in V$ יחיד כך שלכל $v \in V$!
 $\varphi(v) = (u, v)$

(8) הראו כי כל תבנית בילינארית מרוכבת מיוצגת על-ידי מטריצה מהצורה D_r (כ) $D_r \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ שבפינה השמאלית העליונה שלה מטריצת יחידה I_r . מטריצה מהצורה

(9) יהיו λ_1, λ_2 ע"ע שונים של טרנספורמציה לינארית $T: V \rightarrow V$. יהי $V_{\lambda_i} = \{v \in V \mid \exists m (T - \lambda_i I)^m v = 0\}$ אדי:
 $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$

חלק III (34 נקודות) ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות 10 – 12.

(10) תהא $A \in M_3(\mathbb{R})$ מטריצה אורתוגונלית. הראו כי אם $\det(A) = -1$ אזי -1 הוא ע"ע של A .

(11) יהי V מרחב אוניטרי. $T: V \rightarrow V$

א. $U \subseteq V$ הוא אינווריאנטי אם ורק אם U^\perp הוא T^* אינווריאנטי.

ב. מצאו דוגמה ל T, U, V כנ"ל כך ש U הוא T אינווריאנטי אך לא T^* אינווריאנטי.

(12) יהי V מ"ו דו-מימדי ו: $T: V \rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית לא סקלרית שעבורה $\det(T) = a$, $\text{tr}(T) = b$. הראו כי קיים וקטור $\alpha \in V$ מהווים בסיס. רשמו את המטריצה המתאימה ל- T לפי בסיס זה. $\{\alpha, T\alpha\}$

בהצלחה!