

האוניברסיטה העברית בירושלים.

החוג למתמטיקה.

משך המבחן: 3 שעות

מועד א'

סמסטר ב' - תש"ע

המרצים: פרופ' צ. גלנדר, פרופ' צ. סלע.

7.7.10

אלגברה לינארית (2) 80135

חלק I (35 נקודות) ענו על 5 מתוך 6 השאלות 1 – 6

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. אם, לדעתכם, הטענה היא נכונה, נמקו בקצרה (נסחו במדויק את המשפטים המתאימים). אחרת, תנו דוגמה נגדית.

תשובה נכונה בעלת נימוק שגוי (או בלי נימוק) לא תתקבל!!!

(1) תהי A מטריצה רגולרית. אזי A^{-1} היא צירוף ליניארי של I, A, \dots, A^{n-1}

(2) יהיו V_1, V_2, V_3 תתי-מרחבים של מרחב וקטורי V . אם $V_1 + V_2 + V_3 = V$ אזי $\sum_{i=1}^3 \dim(V_i) = \dim(V)$.
אזי: $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$

(3) תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. אזי סכום הע"ע של AB שווה לסכום הע"ע של BA .

(4) תהיינה $A, B \in M_5(\mathbb{C})$ מטריצות נילפוטנטיות. אזי A ו- B דומות אם ורק אם הן מאותו סדר נילפוטנטיות.

(5) יהי V מרחב אוניטרי ותהיה $T: V \rightarrow V$ טרנספורמציה אוניטרית בעלת ע"ע יחיד λ על מעגל היחידה (במישור המורכב). אזי λ ממשי.

(6) יהי V מ"ו ותהיינה T, S טרנספורמציות נילפוטנטיות מתחלפות מ- V לעצמו. אזי $R = T + T + S$ היא טרנספורמציה נילפוטנטית.



חלק II (32 נקודות) ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות 7 – 9.
אין להסתמך על משפטים שקולים או משפטים הנובעים מהטענה שבשאלה.

(7) נסחו והוכיחו את אי-שוויון קושי-שוורץ.

(8) נסחו והוכיחו את משפט ההתמדה של *Sylvester* (לתבניות בלינאריות סימטריות ממשיות).

(9) יהי V מרחב אוניטרי ממימד סופי, ותהי $T: V \rightarrow V$ טרנספורמציה נורמלית. אזי קיים ל- V בסיס אורתונורמלי שביחס אליו T מיוצגת על-ידי מטריצה אלכסונית.

חלק III (34 נקודות) ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות 10 – 12.

(10) הראו כי מטריצה $A \in M_n(F)$ דומה למטריצה משולשית עליונה אם ורק אם הפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים.

(11) א. תהא T העתקה הרמיטית על מרחב אוניטרי V . אזי קיימים λ, γ של T כך ש:

$$\forall v \neq 0 \quad \lambda \leq \frac{(Tv, v)}{(v, v)} \leq \gamma$$

ב. S, T הרמיטיות כך שהע"ע של T נמצאים בקטע $[a, b]$ ושל S בקטע $[c, d]$. אזי $T + S$ הרמיטית וערכיה העצמיים בקטע $[a+c, b+d]$.

(13) יהי V מרחב אויסקלידי עם בסיס v_1, \dots, v_n . נגדיר מטריצה $A = (a_{ij})$ על-ידי

$$a_{ij} = (v_i, v_j)$$

. הראו כי המטריצה A מייצגת תבנית

בלינארית סימטרית מוגדרת חיובית.

בהצלחה !