האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה באלגברה לינארית 2 (80135) - מועד ב׳, סמסטר ב׳ תשס״ט

6 באוגוסט 2009

מרצים: פרופ׳ יעקב ורשבסקי, ד״ר דן רומיק

משך הבחינה: שלוש שעות
כל חומר עזר אסור בשימוש
כל השאלות כתובות בלשון זכר לשם נוחות בלבד
קראו בעיון את ההוראות! יש לצטט במדויק כל טענה בה אתם משתמשים. אין להסתמך על טענות שקולות לטענות אותן אתם מבקשים להוכיח.

בהצלחה!

חלק א׳ (40 נקודות) - ענה על שתיים מהשאלות 1-3

שאלה 1 (20 נקודות)

א. נסח והוכח את אי-שיוויון קושי-שוורץ במרחב מכפלה פנימית. ציין במפורש מתי מתקיים שיוויון. (למי שמעדיף, מותר להניח שמרחב המכפלה הפנימית הוא מעל המספרים הממשיים).

ב. הוכח שקבוצה אורתונורמלית של וקטורים במרחב מכפלה פנימית היא בלתי תלויה לינארית.

שאלה 2 (20 נקודות)

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה F עם מציין שונה מ-2.

א. הוכח שלכל תבנית בילינארית $f : V \times V \to F$ קיים בסיס B של V כך שמטריצת הייצוג $[f]_B$ היא אלכסונית.

ב. אם $F = \mathbb{C}$, הוכח שניתן לבחור את הבסיס B כך שמתקיים

$$[f]_B = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

ומספר ה-1-ים נקבע ביחידות.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית במרחב מכפלה פנימית מרוכב ממימד סופי. הוכח שהתנאים הבאים שקולים:

א. T נורמלית.

ב. קיימות העתקות הרמיטיות $R, S : V \to V$ כך ש-$T = R + iS$ וכך ש-$R \circ S = S \circ R$.

ג. קיימות העתקות $H, U : V \to V$ כך ש-H הרמיטית, U אוניטארית ו- $T = H \circ U = U \circ H$.

(רמז: מומלץ להוכיח בנפרד את השקילויות בין א׳ ל-ב׳ ובין א׳ ל-ג׳.)

חלק ב׳ (30 נקודות) - ענה על שתיים מהשאלות 4-6

שאלה 4 (15 נקודות)

נתונות המטריצות

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

האם הן דומות? הוכח טענתך. (רמז: מצא צורות ז׳ורדן...)

שאלה 5 (15 נקודות)

ב-$\mathbb{R}^3$, נגדיר מכפלה פנימית לא סטנדרטית על ידי $\langle v, u\rangle = v^t A u$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(אין צורך להוכיח שזו אכן מכפלה פנימית). נתונה ההעתקה הלינארית

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

חשב את ההעתקה הצמודה T^*.

שאלה 6 (15 נקודות)

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$. מצא מטריצה אוניטארית U ומטריצה אלכסונית D כך ש-$A = UDU^{-1}$.

חלק ג' (30 נקודות) - ענה על כל השאלות 7-11

7. תהי $A \in M_4(\mathbb{C})$ המוגדרת על ידי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & i & i \\ 3 & 4 & i & i \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(כאן $i = \sqrt{-1}$). יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ הערכים העצמיים של A כולל ריבוי. חשב את $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ ואת $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$.
(רמז: ניתן לפתור כמעט בלי חישובים.)

שאלות נכון או לא נכון: הסבר בקצרה אם כל אחת מהטענות היא נכונה או לאו. תשובה ללא נימוק לא תזכה בנקודות. (תשובה ארוכה ומפורטת יותר מהדרוש תזכה בנקודות אך תבזבז את זמנך.)

8. אם A, B שתי מטריצות ב-$M_4(\mathbb{C})$ עם אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי אז הן דומות.

9. אם $A \in M_n(\mathbb{C})$ אוניטארית וצמודה לעצמה אז $A^2 = I$.

10. א. מכפלה של שתי מטריצות נילפוטנטיות היא מטריצה נילפוטנטית.

ב. סכום של שתי מטריצות נילפוטנטיות היא מטריצה נילפוטנטית.

11. תהי T העתקה לינארית אוניטארית במרחב מכפלה פנימית מרוכב ממימד סופי.

א. קיים $\lambda \in \mathbb{C}$ כך ש-$T - \lambda I$ אינה הפיכה.

ב. $T - \lambda I$ הפיכה לכל λ כך ש-$|\lambda| \neq 1$.

ג. $T - \lambda I$ הפיכה לכל λ כך ש-$|\lambda| = 1$.