

80. 135
12/5/02

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה באלגברה ליניארית 2 (80135)
מועד ב' תשס"ז - 23.8.07

משך הבחינה: 3 שעות

שם המורים: פרופ' אלכס לובוצקי
מר שמואל ברגר

נא לכתוב בעט (לא אדום) על צידה השמאלי של המחברת, ולא בשוליים.
אין להעזר בחומר עזר כתוב או במחשבוניס.

חלק א' ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות הבאות. כל שאלה שווה 20 נקודות.

1. תהי $A \in M_n(F)$ (שדה F) ונתון כי ל- A ערכים עצמיים שונים.
הוכיחו ישירות כי A לכסינה.

2. יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית.
הוכיחו כי שלושת התנאים הבאים שקולים:

א. T שומרת על המכפלה הפנימית (T אוניטרית).

ב. $TT^* = Id$ כאשר Id היא העתקת הזהות על V .

ג. T מעבירה בסיס אורתונורמלי מסויים לבסיס אורתונורמלי.

3. יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל שדה F ויהי $U \leq V$ תת-מרחב.

$$\text{נגדיר } U^0 = \{ \ell \in V^* : \ell(u) = 0 \ \forall u \in U \}$$

$$\text{הוכיחו: } \dim U + \dim U^0 = n$$

חלק ב' ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות הבאות. כל שאלה שווה 15 נקודות.

1. תהי σ תמורה על $\{1, \dots, n\}$. ויהי $F = \mathbb{Z}_p$ שדה השאריות מודול p .

$$\text{נגדיר } A = (a_{ij}) \in M_n(F) \text{ ע"י } a_{ij} = \begin{cases} i \bmod p & j = \sigma(i) \\ 0 & j \neq \sigma(i) \end{cases}$$

מהי הדטרמיננטה של A ? הוכיחו ש- A הפיכה אם ורק אם $p > n$.

2. תהי A מטריצה ריבועית מעל שדה F . הוכיחו כי מימד המרחב $\text{sp}\{I, A, A^2, \dots\}$

שווה למעלת הפולינום המינימלי של A .

3. נתונות $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ מתחלפות ($AB = BA$). הוכיחו כי ל- A ו- B יש וקטור עצמי משותף.

80. 135
/ 5"OP1

חלק ג' ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות. כל שאלה שווה 10 נקודות.

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & y & 1 \\ 1 & 0 & 2 & z \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$$

ונתון כי $|A| = 8$.

מהי הדטרמיננטה של המטריצה הבאה?

$$B = \begin{pmatrix} 2x & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & z \\ 0 & 2 & y & 1 \\ 1+x & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$$

2. תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה אוניטרית לא סקלרית המקיימת $A^5(A^4 - I) = 0$

וידוע כי $1, -1$ אינם ערכים עצמיים של A . מהו הפולינום המינימלי של A ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

הוכיחו: א. A דומה למטריצה אלכסונית.

ב. A אינה דומה למטריצה אוניטרית.

4. האם המטריצות הבאות מעל \mathbb{Z}_{11} דומות? (שדה השאריות מודולי 11).

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

הוכיחו תשובתכם.

בהצלחה!!