80.135
תשס"ז / א

האוניברסיטה העברית בירושלים

החוג למתמטיקה

בחינה באלגברה ליניארית 2 (80135)
מועד א' תשס"ז - 2.8.07

שם המורים : פרופ' אלכס לובוצקי **משך הבחינה: 3 שעות**
מר שמואל ברגר

נא לכתוב בעט (לא אדום) על צידה השמאלי של המחברת, ולא בשוליים.
אין להעזר בחומר עזר כתוב או במחשבונים.

חלק א' ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות הבאות. כל שאלה שווה 20 נקודות.

1. נסחו והוכיחו את נוסחת קרמר לפתרון מערכת משוואות.

2. א. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ ותהי $T: V \to V$ העתקה לינארית המקיימת $\langle T\alpha, \alpha \rangle = 0$ לכל $\alpha \in V$. הוכיחו כי $T = 0$.
ב. האם טענה זו נכונה גם עבור מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$? הוכיחו תשובותיכם.

3. נתונה $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(F)$ (F שדה) ונתון כי הפולינום האופייני של A מתפרק למכפלת גורמים לינאריים, ושלכל ערך עצמי λ, הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגאומטרי. הוכיחו A לכסינה.

חלק ב' ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות הבאות. כל שאלה שווה 15 נקודות.

1. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה F. יהי f פונקציונל לינארי על V שאינו פונקציונל האפס. יהי N המאפס של f ב- V ויהי α_0 וקטור ב- V שאינו ב- N.
הוכיחו שלכל $\alpha \in V$ קיים סקלר c וקיים וקטור $\beta \in \mathrm{N}$ כך ש- $\alpha = c\alpha_o + \beta$. הוכיחו ש- c ו- β הללו נקבעים באופן יחיד ע"י α.

2. יהי V מרחב הפולינומים הממשיים במשתנה אחד ממעלה $2 \geq$ (כולל פולינום האפס).
נגדיר $T: V \to V$ ע"י $(Tp)(x) = p(x+1)$. הראו כי T אינה לכסינה.

3. יהיו $o \neq v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ שני וקטורים מאורך זהה. הוכיחו כי קיימת העתקה לינארית אוניטרית $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ כך ש- $Tv_1 = v_2$.

80. 135
תשס"ג / א'

חלק ג' ענו על <u>שלוש</u> מתוך ארבע השאלות הבאות. כל שאלה שווה 10 נקודות.

1. תהינה $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ מטריצות רגולריות. הוכיחו כי ל- AB ו- BA אותם ערכים עצמיים.

2. תהי σ תמורה על $\{1,\dots,n\}$. נגדיר $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$ ע"י $a_{ij}=\begin{cases} i & j=\sigma(i) \\ 0 & j\neq\sigma(i)\end{cases}$. מהי הדטרמיננטה של A? הוכיחו ש- A הפיכה.

3. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{R}$. יהיו $o\neq v_1,v_2\in V$ כך ש- $v_1\neq v_2$. הוכיחו שהמרחב הניצב ל- v_1 שווה למרחב הניצב ל- v_2 אם ורק אם v_1,v_2 תלויים לינארית.

4. יהיו $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}^3$ הנתונים ע"י $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$.

יהיו $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in(\mathbb{R}^3)^*$ המקיימים $\varphi_i(\alpha_j)=\delta_{ij}$. חשבו את $\varphi_2\begin{pmatrix}12\\14\\16\end{pmatrix}$. הסבירו תשובתכם.

<u>בהצלחה!!</u>

— 6 —