

80. 135
10/12

בחינה באלגברה ליניארית (2) (80135)
מועד ב' תשס"ו

משך הבחינה: 3 שעות

שם המורים: מר שמואל ברגר
פרופ' אהוד פרידגוט

המבחן בנוי משלושה חלקים.

בחלק I עליכם לענות על שתיים משלוש השאלות, שווי כל שאלה 25 נקודות.

בחלק II עליכם לענות על שתי השאלות, שווי כל שאלה 10 נקודות.

בחלק III עליכם לענות על כל שבע השאלות, שווי כל שאלה 5 נקודות.

אין להעזר בחומר עזר כתוב או במחשבוני.

חלק I ענו על שתיים משלוש השאלות הבאות.

צטטו במדויק את הטענות עליהן אתם מסתמכים.

1. יהי V מרחב וקטורי n מימדי, $T: V \rightarrow V$ טרנספורמציה ליניארית ו Δ פונקצית נפח

על V . תהי A המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס כלשהו. יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V$

וקטורים כלשהם. הוכיחו

$$\Delta(T\alpha_1, T\alpha_2, \dots, T\alpha_n) = |A| \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

2. הוכיחו: יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל \mathbb{C} , ותהי $T: V \rightarrow V$

טרנספורמציה ליניארית נורמלית. אזי קיים ל V בסיס אורתונורמלי המורכב מוקטורים

עצמיים של T .

3. נסחו והוכיחו את משפט ההתמדה של סילבסטר.

חלק II ענו על שתי השאלות הבאות.

4. יהי $U = \text{Span}((1,0,3), (3,0,1)) \subseteq \mathbb{R}^3$

א. מצאו את U^\perp ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית. הוכיחו את תשובתכם.

ב. מצאו את הוקטור ב U הקרוב ביותר ל α כאשר $\alpha \in U^\perp$. הוכיחו את

תשובתכם.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .5$$

מצאו את הפולינום האופייני של A ואת הפולינום המינימלי של A . אם A לכסינה,

לכסנו אותה, ואם לאו, הוכיחו שאינה לכסינה.

80. 135
12/10/11

חלק III ענו על כל שבע השאלות.

6. תהי $A \in M_3(\mathbb{R})$ ותהי $B = A^{100} + A^{80}$.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 17 \\ 0 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

מהם הערכים העצמיים של B ? נמקו בקצרה.

7. תהי $A \in M_2(\mathbb{R})$. האם $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ לכסינה? נמקו בקצרה.

8. תהי $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. האם A לכסינה כמטריצה ב- $M_2(\mathbb{R})$? האם A לכסינה

ב- $M_2(\mathbb{F}_2)$ (הוא שדה בן שני איברים). נמקו את תשובתכם.

9. האם המטריצות $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ חופפות? נמקו.

10. האם קיימת $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ טרנספורמציה ליניארית נורמלית שאינה אוניטרית ואינה הרמיטית? נמקו.

11. תהי f התבנית הביליניארית המוגדרת על \mathbb{R}^2 ע"י

$$f((x, y), (z, w)) = xz + 2xw + 3yz + 4yw$$

מהי המטריצה המייצגת את f ביחס לבסיס הסטנדרטי? מצאו בסיס שביחס אליו המטריצה המייצגת את f היא סימטרית, או נמקו מדוע אין בסיס כזה.

12. יהי V מרחב וקטורי ממימד 17. יהיו $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in V$ ו- $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in V^*$ כך ש

$$\varphi_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$$

האם נובע בהכרח ש- $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ בלתי תלויים ליניארית? הוכיחו!

בהצלחה!!