80.135
תק"ס/ 1/א

בחינה באלגברה ליניארית (2) (80135)

מועד א' תשס"ו

שם המורים: מר שמואל ברגר **משך הבחינה: 3 שעות**

פרופ' אהוד פרידגוט

19.7.06

המבחן בנוי משלושה חלקים.

בחלק I עליכם לענות על שתיים משלוש השאלות, שווי כל שאלה 25 נקודות.

בחלק II עליכם לענות על שתי השאלות, שווי כל שאלה 10 נקודות.

בחלק III עליכם לענות על כל שבע השאלות, שווי כל שאלה 5 נקודות.

אין להעזר בחומר עזר כתוב או במחשבונים.

חלק I ענו על שתיים משלוש השאלות הבאות.

צטטו במדוייק את הטענות עליהן אתם מסתמכים.

1. א. יהי $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n\}$ בסיס של מרחב וקטורי V, ויהיו נתונים n וקטורים

$$.\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\varepsilon_j$$

אם Δ היא פונקצית נפח על r אזי הוכיחו כי $\Delta(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=t\Delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)$

כאשר t תלויה רק ב n^2 הסקלרים a_{ij} $1\le i,j\le n$, אבל לא ב Δ.

ב. הוכיחו: אם Δ פונקצית נפח המתאפסת על בסיס כלשהו אז Δ היא זהותית אפס.

ג. הראו שאם Δ פונקצית נפח שאינה זהותית אפס ו $\alpha_1,...,\alpha_n$ ב V

אז $0\neq\Delta(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ אם ורק אם $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ בלתי תלויים ליניארית.

2. הוכיחו: יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$, ותהי $T:V\to V$ טרנספורמציה ליניארית נורמלית. אזי קיים ל V בסיס אורתונורמלי המורכב מוקטורים עצמיים של T.

3. הוכיחו: יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה F ותהי T טרנספורמציה ליניארית מ V ל V. אזי T לכסינה אם ורק אם הפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים ליניארים מעל F, ולכל ערך עצמי של T הרבוי הגיאומטרי שווה לרבוי האלגברי.

80, 135
מבחן/א

חלק II ענו על שתי השאלות הבאות.

4. תהי $A \in M_2(\mathbb{R})$ $.A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

מצאו $P \in M_2(\mathbb{R})$ אורתוגונלית כך ש $P^{-1}AP$ אלכסונית.

הסבירו את תהליך הפתרון.

5. ב $\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית מצאו את הוקטור הקרוב ביותר ל $(1,1,1)$

ב- U , כאשר

$.U = \mathrm{Span}\left((1,1,0),(1,-1,0)\right)$

הסבירו את פתרונכם.

חלק III ענו על כל שבע השאלות.

תהי $B \in M_3(\mathbb{R})$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6. האם B לכסינה? נמקו בקצרה.
7. מהו הפולינום המינימלי של B^{100} ? נמקו בקצרה.

8. תהי $A \in M_4(\mathbb{C})$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & 0 & 17 & 15 \\ 2 & i & i & i \end{pmatrix}$$

ו $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ הערכים העצמיים של A (כולל רבוי).

מצאו את $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ ואת $.\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4$

רמז: חישבו לפני שתחַשבו, ניתן לפתור את השאלה בעל פה.

80.135
מבחן 1/16

9. האם המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

דומה למטריצה אלכסונית ב $M_5(\mathbb{R})$? נמקו! רמז: עיינו היטב במטריצה.

10. יהי $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ בסיס למרחב וקטורי V מעל שדה F, ותהי $f : V \times V \to F$ תבנית בילינארית.
הוכיחו או הפריכו:
אם $f(\alpha_i, \alpha_j) = f(\alpha_j, \alpha_i)$ לכל i, j
אזי $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$ לכל $\alpha, \beta \in V$.

11. יהי V מרחב מכפלה פנימית $T : V \to V$ טרנספורמציה ליניארית <u>צמודה לעצמה</u>.
האם $\langle T\alpha, \alpha \rangle = 0$ לכל α גורר $T = 0$? הוכיחו את תשובתכם.

12. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ טרנספורמציה ליניארית אורתוגונלית.
A היא מטריצה <u>אלכסונית</u> המייצגת את T ביחס לבסיס מסוים. מהן המטריצות A האפשריות? נמקו!

בהצלחה!!