

80. 135
ל' ס' 011

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

אלגברה ליניארית (2) (80135)

22.9.05

סמסטר ב' תשס"ה מועד ב'

המרצים: פרופ' שחר מוזס, פרופ' צליל סלע

למבחן שלושה חלקים. ערכו של החלק הראשון 35 נק', החלק השני 32 נק', והחלק השלישי 34 נק'. הציון המקסימלי במבחן הוא 100.

חלק I

ענו על 5 מתוך 6 השאלות 1-6 (עריך כל שאלה 7 נקודות).
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות (נמקו בקצרה אם הטענה נכונה, ותנו דוגמה נגדית אם איננה נכונה).

(1) יהי V מ"ו ממימד סופי מעל שדה F , ותהיינה $S: V \rightarrow V$ $T: V \rightarrow V$ העתקות מתחלפות. אזי $\ker(S)$ הוא תת-מרחב T -אינריאנטי.

(2) אם $A \in M_2(\mathbb{R})$ ו- $A^2 = I$ ניתנת לליכסון, אזי A ניתנת לליכסון.

(3) תהיינה $A_1, A_2 \in M_4(\mathbb{C})$. אם ל- A_1 ו- A_2 אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אזי A_1 דומה ל- A_2 .

(4) תהי $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ אזי: $B^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1000 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5) תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ ונתבונן ב- A כהעתקה מ- \mathbb{C}^n ל- \mathbb{C}^n . אזי $\ker(A) = (\text{Im}(A^*))^\perp$

(6) תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה נורמלית. אזי A הרמיטית אם ורק אם כל הע"ע של A הם ממשיים.



חלק II

ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות 7-9 (ערך כל שאלה 16 נק'). אין להסתמך על משפטים שקולים או משפטים הנובעים מהטענה שבשאלה.

(7) הוכיחו כי כל מטריצה סימטרית מעל R חופפת למטריצה אלכסונית.

(8) תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. הראו כי: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

(9) יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי, ותהי $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית. הגדירו מהי ההעתקה הצמודה ל- T והוכיחו כי ל- T קיימת העתקה צמודה יחידה.

חלק III

ענו על שתיים מהשאלות 10-12 (ערך כל שאלה 17 נקודות).

(10) מצאו את צורת ז'ורדן של המטריצה:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$$

(11) תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$. הוכיחו כי דומה ל- A^t .

(12) תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה המקיימת $A^5 = A$. הוכיחו כי דומה

למטריצה מהצורה:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} I_r & & & 0 \\ \hline & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

כש I_r היא מטריצת יחידה.

בהצלחה!!!