80.135
תקס״ה / א׳

האוניברסיטה העברית בירושלים

החוג למתמטיקה

אלגברה ליניארית (2) (80135)

סמסטר ב׳ תשס״ה מועד א׳ 7.7.05

<u>המרצים</u>: פרופ׳ שחר מוזס, פרופ׳ צליל סלע

למבחן שלושה חלקים. ערכו של החלק הראשון 35 נק׳, החלק השני 32 נק׳, והחלק השלישי 34 נק׳. הציון המקסימלי במבחן הוא 100.

חלק I

ענו על 5 מתוך 6 השאלות 1-6 (ערך כל שאלה 7 נקודות).
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות (נמקו בקצרה אם הטענה נכונה, ותנו דוגמה נגדית אם איננה נכונה).

1. יהי V מ״ו ממימד סופי מעל שדה F, תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית ויהי $W\subseteq V$ תת-מרחב T- אינראנטי. אזי קיים תת-מרחב T-אינריאנטי $U\subseteq V$ כך ש: $V=W\oplus U$

2. כל תבנית ריבועית מעל שדה F ניתנת לייצוג על-ידי מטריצה אלכסונית (על-ידי בחירת בסיס מתאים).

3. יהי V מ״ו ממימד סופי מעל שדה F. $T:V\to V$, $S:V\to V$ העתקות ליניאריות מתחלפות: $T\circ S = S\circ T$. אם W הוא תת-מרחב T-אינוריאנטי אזי W הוא תת-מרחב S-אינוריאנטי.

←

80, 135
א/ה' תשס"ה

4. תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$. אם λ^2 הוא ע"ע של A^2 אזי λ הוא ע"ע של A.

5. תהי $A\in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה נורמלית. אזי $\ker(A)=(\mathrm{Im}(A))^{\perp}$

6. תהיינה $A,B\in M_n(F)$. אם $A\cdot B=0$ ו- $A,B\neq 0$, אזי $\det(A)=\det(B)=0$.

חלק II

ענו על שתים מתוך שלוש השאלות 7-9 (ערך כל שאלה 16 נק'). אין להסתמך על משפטים שקולים או משפטים הנובעים מהטענה שבשאלה.

7) נסחו והוכיחו את נוסחת פיתוח הדטרמיננט לפי שורה (נוסחת המינורים).

8) נסחו והוכיחו את משפט ההתמדה של סילבסטר.

9) תהי $A\in M_n(\mathbb{C})$. הוכיחו כי צורת ז'ורדן של A היא יחידה עד כדי סדר הבלוקים (שימו לב כי אינכם מתבקשים להוכיח קיום – עליכם להוכיח יחידות בלבד).

חלק III

ענו על שתים מהשאלות 10-12 (ערך כל שאלה 17 נקודות).

10) מצאו את צורת ז'ורדן של המטריצה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 0 \\ 9 & 8 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

11) הוכיחו כי לכל מטריצה $A\in M_n(\mathbb{C})$ המטריצה I_n+A^*A איננה סינגולרית (I_n היא מטריצה היחידה).

12) תהי $A\in M_4(\mathbb{C})$ כך ש: $A^4=I_4$. אם ל-A ע"ע יחיד λ אזי $A=\lambda I_4$.

בהצלחה!!!