80.135
תשס"ד/א

האוניברסיטה העברית בירושלים.
<u>החוג למתמטיקה.</u>

סמסטר ב' - תשס"ד    מועד א'    <u>משך המבחן:</u> 3 שעות

**<u>המרצים:</u> פרופ' צ. סלע , ד"ר א. איזנברג.**

**7.7.04**

# אלגברה לינארית (2)    80135

<u>חלק I</u> ( 35 נקודות) ענו על 5 מתוך 6 השאלות 1 – 6

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. אם, לדעתכם, הטענה היא נכונה,
נמקו בקצרה (נסחו במדויק את המשפטים המתאימים).
אחרת, תנו דוגמה נגדית !

<u>תשובה נכונה בעלת נימוק שגוי( או בלי נימוק) לא תתקבל!!!</u>

1) תהיינה $A,B\in M_n(F)$ . אזי $tr(AB)=tr(BA)$ .

2) יהי $V$ מרחב לינארי בעל ממד סופי מעל שדה $F$ , ותהי
$T:V\to V$ נילפוטנטית מסדר $r$. אזי לכל $1\le i<r$

$$rank(T^i)>rank(T^{i+1})$$

3) יהי $V$ מרחב לינארי בעל ממד סופי מעל שדה $F$ , ותהי
$T:V\to V$ העתקה לינארית. אזי קיים $0<n$ כך ש:

$$Ker(T^n)\cap \operatorname{Im}(T^n)=\{0\}$$

4) תהיינה $A_1,A_2\in M_3(\mathbf{C})$ . אם ל- $A_1$ ו- $A_2$ אותו הפולינום
האופיני ואותו הפולינום המינימלי, אז $A_1$ דומה ל- $A_2$

5) תהי $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ העתקה לינארית, ויהי

$$f(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n$$

פולינום שכל מקדמיו הם מספרים ממשיים. אזי $\lambda\in\mathbf{R}$ הוא ע"ע של $T$
אם ורק אם $f(\lambda)$ הוא ע"ע של $f(T)$ .

6) יהי $V$ מרחב לינארי מעל שדה $F$ בעל ממד סופי , ותהי $T:V\to V$
העתקה לינארית. אם $W\subseteq V$ הוא תת – מרחב $T$ – אינווריאנטי, אז $T^{-1}(W)$
הוא תת – מרחב $T$ – אינווריאנטי.

←

80. 135
תשס"ג/א/1



**חלק II** ( 32 נקודות)  ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות 7 – 9.

**אין להסתמך על משפטים שקולים או משפטים הנובעים מהטענה שבשאלה.**

7) יהי $V$ מרחב אוניטרי בעל מימד סופי, ותהי $T : V \to V$ העתקה לינארית.
הוכיחו כי $T$ טרנספורמציה נורמלית אם ורק אם קיים בסיס אורתונורמלי של $V$ המורכב כולו מוקטורים עצמיים של $T$.

8) יהי $V$ מרחב לינארי מעל שדה $F$ בעל ממד סופי, ותהי $T : V \to V$ טרנספורמציה נילפוטנטית מסדר $0 < r$. הוכיחו כי קיימים שני תת – מרחבים $U$ ו- $W$ האינוריאנטיים לגבי $T$ כך ש- $U$ הוא $T$- ציקלי ו- $V = U \oplus W$.

9) הוכיחו כי צורת ז'ורדן של מטריצה נילפוטנטית היא יחידה עד כדי סידור הבלוקים.

**חלק III** ( 34 נקודות) ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות 10 – 12.

10) תהי $A \in M_m(C)$ ונניח כי קיים $0 < r$ כך ש: $A^r = I$.
הוכיחו שאם ל- $A$ יש ע"ע יחיד $\lambda \in C$, אזי $A = \lambda I$.

11) מצאו את צורת ז'ורדן של המטריצה $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

12) יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית, ויהי $B = (b_1, \dots, b_n)$ בסיס של $V$. נניח כי לכל טרנספורמציה לינארית $T : V \to V$ מתקיים כי אם המטריצה שלה ביחס לבסיס $B$ היא $A$, אזי המטריצה של העתקה $T^*$ ביחס לבסיס $B$ היא $A^*$.
הוכיחו כי $B$ הוא בסיס אורתוגונלי המורכב מוקטורים בעלי אורך שווה.
( שימו לב: האורך אינו בהכרח יחידה ).

**הערה: למרות שסכום הנקודות הוא 101, הציון המקסימלי הוא 100**
**בהצלחה !**