80. 135
תשס"ג / א'

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה באלגברה ליניארית (2) (80135)
מועד א' תשס"ג

שם המורים: **פרופ' אלכס לובוצקי**
פרופ' אהוד דה-שליט

משך הבחינה: 3 שעות

I. ענה על שתיים משלושת השאלות הבאות (15 נקודות כל אחת).

1. הוכח שאם T טרנספורמציה ליניארית במרחב וקטורי V, ואם $v_1,\dots,v_r$ וקטורים עצמיים של T עם ערכים עצמיים שונים, אזי הם בלתי תלויים ליניארית.

2. יהי V מרחב מכפלה פנימית.

א. הגדר מהי טרנספורמציה ליניארית נורמלית ב- V.

ב. הראה שאם T נורמלית, כל וקטור עצמי של T הנו גם וקטור עצמי של T^*.

3. א. הגדר: מרחב דואלי של מרחב וקטורי V.

ב. הוכח שאם $\dim V < \infty$, מימד המרחב הדואלי של V, שוה למימד V.

II. ענה על שלוש מתוך חמש השאלות הבאות (15 נקודות כל אחת).

1. תהי T טרנספורמציה ליניארית של $\mathbb{R}^2$ המקיימת לכל וקטור α

$$T(T\alpha) = T\alpha + C\alpha$$

מהם הערכים האפשריים של C אם ידוע שיש ל- T שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים ליניארית?

2. ב- $\mathbb{R}^4$, מצא את הנקודה הקרובה ביותר לוקטור $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ במישור הנפרש

ע"י $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

המשך מעבר לדף ←

80. 135
ק/ד"סמ

3. תהי T טרנספורמציה ליניארית במרחב מכפלה פנימית ממשי, כך שלכל וקטור v, Tv ניצב ל- v. הוכח: $T^* = -T$.

4. מצא את הדרגה ואת הסיגנטורה של התבנית הביליניארית על $\mathbb{R}^3$ המתאימה (בבסיס הסטנדרטי) למטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. מצא את צורת ז'ורדן של המטריצה הממשית $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

III. ענה על כל השאלות הבאות. בכל אחת סמן תשובה אחת נכונה בלבד.

1. נתונים שלושה תתי מרחבים של מרחב וקטורי V, שאחדם פורש את V. אזי V הנו סכום ישר שלהם אם :

א. חתוך כל שני תתי-מרחבים מהשלושה הנו 0.

ב. חתוך כל שלושת תתי-המרחבים הנו 0.

ג. סכום מימדי תתי-המרחבים הנו $\dim V$.

ד. חתוך כל שני תתי-מרחבים ריק.

2. תהי T טרנספורמציה לניארית במרחב מכפלה פנימית. מי מהטענות הבאות נכונה?

א. אם T רגולרית, T נתנת ללכסון.

ב. אם T נתנת ללכסון, T רגולרית.

ג. אם T מתחלפת עם T^*, אזי T רגולרית.

ד. אם T רגולרית, גם T^* רגולרית.

3. תהי B התבנית הביליניארית על $\mathbb{R}^2$ הבאה:

$$B\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = xx' + xy' + x'y + x'y'$$ אזי

א. B איננה סימטרית.

ב. B סימטרית וחיובית.

ג. B מכפלה פנימית.

ד. B סימטרית, אך לא חיובית.

המשך בדף הבא ←

80. 135
1א/ד"סת

4. יהיו α,β שני וקטורים במרחב מכפלה פנימית V כך ש-

$$(\alpha,\alpha)=(\beta,\beta)=|(\alpha,\beta)|=1$$

אזי:

א. α,β תלויים ליניארית.

ב. $\alpha=\beta$.

ג. $Span\{\alpha,\beta\}$ הנו מישור.

ד. $\|\alpha-\beta\|=1$.

5. תהי T ט"ל נילפוטנטית במרחב 4-מימדי.
ידוע ש-

$$Ker(T^2)\neq Ker(T^3)\ .$$

מי מהטענות הבאות נכונה?

א. $T^3=0$.

ב. בצורת ז'ורדן של T יש רק בלוק אחד.

ג. בצורת ז'ורדן של T יש בלוק מסדר ≤ 3.

ד. $T^3\neq 0$.

בהצלחה!