80.135
תשס"א/ב'/1

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבחן באלגברה לינארית (2) (80135)

מועד ב' תשס"א

המורים : פרופ' אלכס לובוצקי, פרופ' אליהו ריפס וד"ר יהודה שלום

משך הבחינה: 3 שעות

חלק א' (40 נקודות)

ענו על שתי השאלות הבאות (20 נקודות לכל שאלה). אין להסתמך על משפטים השקולים או נובעים מהטענות שבשאלות.

1. יהי V מרחב מ"פ מעל $\mathbf{C}$, $T:V\to V$ ט"ל. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:
   א. $\langle T\alpha,T\beta\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$ לכל $\alpha,\beta\in V$.
   ב. $T^*T=I$ כאשר I היא טרנספורמצית הזהות ו- T^* הט"ל הצמודה ל- T.
   ג. קיים בסיס אורתונורמלי של V $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ כך שגם $\{T\alpha_1,\dots,T\alpha_n\}$ הוא בסיס א"נ.

2. יהי V מרחב ווקטורי ממימד n מעל שדה F.
   א. הגדירו פונקציית נפח Δ על V.
   ב. הוכיחו שאם $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in V$ סדרה ת"ל אזי $\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$.
   ג. הוכיחו שאם $\sigma\in S_n$ הנה תמורה כלשהיא שסימנה $\operatorname{sgn}\sigma$ אזי לכל $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in V$ מתקיים: $\Delta\left(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(n)}\right)=(\operatorname{sgn}\sigma)\Delta\left(\alpha_1,\dots,\alpha_n\right)$.

המשך מעבר לדף ←

-6-

80. 135
מקס"ב/ 1

מועד ב' תשס"א –2-

חלק ב' (32 נקודות)

ענו על שתי השאלות הבאות (16 נקודות לכל שאלה).

3. בצעו את תהליך גרם שמידט ב- $\mathbf{R}^3$ (עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית) על שלושת הווקטורים: $v_1 = (1,2,2)$, $v_2 = (2,1,-2)$, $v_3 = (2,1,1)$ בסדר מימין לשמאל. (אין צורך לבצע נרמול לווקטור האחרון בתהליך). וודאו ע"י חישוב מפורש ששלושת הווקטורים שהתקבלו הנם ניצבים זה לזה.

4. יהי V מרחב הפולינומים ממעלה $2 \geq$ מעל $\mathbf{R}$ ותהי $T:V \to V$ מוגדרת ע"י:

$$T\big(p(x)\big) = p(x) + (x+1)p'(x) - x^2 \cdot p''(x)$$

כאשר $p'(x)$, $p''(x)$ הנם הנגזרת הראשונה והשנייה של $p(x)$.

א. חשבו את המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס $\{1, x, x^2\}$ (אין צורך להוכיח ש T היא אכן ט"ל).

ב. חשבו את הע"ע והו"ע של T.

ג. חשבו את הפולינום המינימלי של T.

חלק ג' (28 נקודות)

ענו על 4 מתוך 6 השאלות הבאות (יש לרשום בטבלה בצד האחורי של העמוד הירוק הראשון במחברת את מספרי השאלות שנבחרו לבדיקה). לכל שאלה 7 נקודות.
בכל שאלה קבעו אם הטענה נכונה או לא ותנו הוכחה קצרה או דוגמא נגדית. תשובות ללא נימוק לא יזכו כלל לניקוד.

5. אם $T:V \to V$ ט"ל המקיימת $T^3 + I = 0$ אזי $\dim V \geq 3$.

6. יהי V מ"ו מעל שדה F. אם לפולינום המינימלי של ט"ל $T:V \to V$ אין שורשים ב- F אזי כך גם לפולינום האופייני.

המשך בדף הבא

- 7 -

80. 135
תשס"א/ב'

מועד ב' תשס"א –3-

7. תהיינה $A, B \in M_n(F)$ ונניח של- A ישנם n ע"ע שונים ב- F.
אם ל- A ול- B ישנו אותו פולינום אופייני אזי הן דומות.

8. תהי $A \in M_3(\mathbf{C})$ מקיימת $AA^* = A^*A$. אם הווקטורים $(1,1,0)$ ו- $(1,0,1)$ הנם ו"ע של A
עם ע"ע α, β אזי $\alpha = \beta$.

9. יהי V מרחב מ"פ מעל $\mathbf{C}$, $v, u, w \in V$ ווקטורים שונים מ- 0.
אם $v + u + w = 0$ אזי קיימים שניים מתוך שלושת הווקטורים שאינם ניצבים.

10. תהי S_n קבוצת התמורות על $\{1,\ldots,n\}$ $(n \geq 2)$ ונניח ש- $\alpha\beta\gamma = (12)$ כאשר (12) הנה
תמורת החילוף על 1,2. אזי לפחות אחת מבין התמורות α, β, γ היא אי זוגית.

בהצלחה!

– 8 –