80.135
תקס"ב / א'
סמ. ב'

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

<u>מבחן באלגברה לינארית (2) (80135)</u>

מועד א' סמ' ב' תשס"א

המורים : פרופ' אלכס לובוצקי, פרופ' אליהו ריפס וד"ר יהודה שלום

משך הבחינה: 3 שעות

<u>חלק א' (35 נקודות)</u>

ענו על שתי השאלות הבאות. אין להסתמך על משפטים השקולים או נובעים מהטענות שבשאלות.

1. א. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה המרוכבים $\mathbf{C}$ ו- $\varphi : V \to \mathbf{C}$ ט"ל (ז"א φ הוא פונקציונאל לינארי). הוכיחו שקיים ווקטור יחיד $\beta \in V$ כך שלכל $\alpha \in V$ מתקיים $\varphi(\alpha) = <\alpha, \beta>$ ($<,>$ היא המ"פ על V).

   ב. בסימוני סעיף א' תהי $T : V \to V$ ט"ל. הוכיחו שקיימת ט"ל $S : V \to V$ כך ש $<T\alpha, \beta> = <\alpha, S\beta>$ לכל $\alpha, \beta \in V$.
   (הערה: בפיתרון סעיף ב' תוכלו להשתמש ב- א' גם אם לא פתרתם סעיף זה).
   (18 נק')

2. א. תהי $A \in M_n(F)$ כאשר F שדה כלשהוא. הגדירו את הפולינום האופייני $f_A(x)$ של המטריצה A והוכיחו שהוא ממעלה n.

   ב. הוכיחו שקיים ל- A וקטור עצמי עם ע"ע $\lambda \in F$ אם ורק אם $f_A(\lambda) = 0$.

   ג. הוכיחו שאם $m(x)$ הנו פולינום מעל F שונה מ- 0 בעל מעלה מינימלית המקיים $m(A) = 0$ אזי $m(x)$ מחלק כל פולינום $f(x)$ מעל F המקיים $f(A) = 0$.
   (ניתן להסתמך על תכונות חילוק עם שארית של פולינומים).

   (17 נק')

המשך מעבר לדף ←

- 3 -

80. 135
תשפ״ו/פיסיקה
ולבש. סמסטר

מועד א' תשס"א –2-

חלק ב' (30 נקודות)

ענו על שתי השאלות הבאות:

3. תהי $A=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$. מצאו מטריצות $P,B\in M_2(\mathbf{R})$ כאשר B אלכסונית ו- P רגולרית, כך ש- $B=P^{-1}AP$. **(15 נק')**

4. יהי V מרחב הפולינומים ממעלה ≤ 2 מעל שדה הממשיים $\mathbf{R}$. עבור $f,g\in V$ נגדיר

$$<f,g>=2f(-1)\cdot g(-1)+5\cdot f(0)\cdot g(0)+2\cdot f(1)\cdot g(1)$$

א. הוכיחו ש <,> הופכת את V למרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbf{R}$.

ב. בצעו את תהליך גרם שמידט לווקטורים $f_1=1$, $f_2=x$, $f_3=x^2$ (אין צורך לנרמל את הווקטור האחרון בתהליך). **(15 נק')**

חלק ג' (35 נק')

ענו על 5 מתוך 7 השאלות הבאות (יש לרשום בטבלה בצד האחורי של העמוד הירוק הראשון במחברת את מספרי השאלות שנבחרו לבדיקה). לכל שאלה 7 נקודות.
בכל שאלה קבעו אם הטענה נכונה או לא ותנו הוכחה קצרה או דוגמא נגדית. תשובות ללא נימוק לא יזכו כלל לניקוד.

5. אם $A,B\in M_n(\mathbf{R})$ מטריצות דומות אז $\det A\ne\det(B^2)+1$.

6. יהי V מרחב מ"פ מעל שדה המרוכבים $\mathbf{C}$ ו- $T:V\to V$ ט"ל.
אם כל הע"ע של T הנם ממשיים אז $T=T^*$.

7. אם V מרחב מ"פ ממימד 10 מעל $\mathbf{C}$ אזי קיימת פונקציית נפח Δ על V, 10 ווקטורים $v_1,\dots,v_{10}\in V$, ווקטור $0\ne u\in V$, כך ש- $\Delta(v_1,\dots,v_{10})\ne 0$ ו- u ניצב לכל v_i.

80. 135
פתק"א /א'
מועד ב'.

מועד ב' תשס"א -3-

8. אם $A \in M_n(\mathbf{C})$ מקיימת $A^* = A^2 + I_n$, (כאשר I_n היא מטריצת היחידה מסדר nxn ו- A^* היא המטריצה הצמודה ל- A), אזי קיימת מטריצה אוניטרית $U \in M_n(\mathbf{C})$ כך ש- UAU^{-1} אלכסונית.

9. לכל ערך של $t \in \mathbf{C}$ עמודות המטריצה $A_t = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & t \\ \sqrt{5} & t & \sqrt{7} \\ t & \sqrt{11} & \sqrt{13} \end{pmatrix}$ הנן בלתי תלויות לינארית.

10. יהי V מרחב מ"פ מעל $\mathbf{C}$, $T: V \to V$ ט"ל אוניטרית.
אם וקטור $0 \neq v \in V$ מקיים $\|Tv + v\| = \|Tv\| + \|v\|$ אזי 1 הוא ע"ע של T.

11. יהי $V = \mathbf{R}_{10}[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה ≤ 10 מעל $\mathbf{R}$, ותהי $<,>$ מכפלה פנימית (ממשית) כלשהיא על V.
אם $U \subseteq V$ תת-מרחב אזי $\dim U \neq \dim U^{\perp}$ ($U^{\perp} =$ המרחב הניצב ל- U).

בהצלחה!

-5-