80135 99/00

91

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה באלגברה לינארית (2) (80135)

סמסטר האביב - תש"ס - מועד א'

המורים: פרופ' אהוד דה שליט, פרופ' עזריאל לוי, פרופ' יורי קיפר הזמן: שלוש שעות

ענה על 5 שאלות בלבד מתוך 7 השאלות הבאות. אם ייענו יותר שאלות אז תיבדקנה חמש התשובות הראשונות בלבד.
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכיח. מותר להסתמך על משפטים קודמים מבלי להוכיחם, אך עליהם להיות מנוסחים באופן מלא.

1. א. הוכח את אי-השיוויון של קושי-שוורץ בנוגע למכפלה הפנימית (α, β).
ב. הוכח מתי בדיוק קיים שיוויון באי-שיוויון זה.

2. א. נסח את נוסחת הפיתוח לפי שורה של הדטרמיננטה.
ב. הוכח את נוסחת הפיתוח של הדטרמיננטה לפי השורה הראשונה.

3. תהי T טרנספורמציה לינארית. נסח והוכח את המשפט המקשר את דרגת T עם אפסות T (כלומר עם מימד $\mathrm{Ker}\, T$).

4. תהי $T : R^3 \to R^3$ טרנספורמציה לינארית שהפולינום האופייני שלה הוא $x^3 - \frac{1}{4}x$. הוכח כי לכל $\alpha \in R^3$ קיים $T^n\alpha \to 0$ כאשר $n \to \infty$.
אנו אומרים שסידרת ווקטורים ב-R^3 שואפת לאפס אם כל אחד משלושת הרכיבים של איברי הסידרה שואף לאפס.

5. תהי $P : V \to V$ טרנספורמציה לינארית כך ש- $P^2 = P$. הוכח כי $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.
($\mathrm{Im}(T)$ זאת הדמות, או הטווח, של T.)

6. תהי T טרנספורמציה לינארית במרחב הפולינומים ממעלה ≤ 4 הנתונה ע"י $T(p(x)) = p(x+1)$. בחר בסיס למרחב זה, וכתוב את המטריצה של T ביחס לבסיס זה.

7. יהי V מרחב הפולינומים מעל לממשיים ממעלה ≤ 2 עם המכפלה הסקלרית $(p,q) = \int_1^2 p(x)q(x)dx$. מצא בסיס אורתונורמלי למרחב זה.

בהצלחה!