בחינה באלגברה ליניארית (1) 80134

הזמן : 3 שעות

מועד ב' תש"ע יום חמישי י' בניסן תש"ע 25.3.2010 שעה 10^{00}

המורים : פרופ' אליהו ריפס, ד"ר יבגני סטרחוב, שמואל ברגר

משך המבחן 3 שעות.

יש במבחן שלושה חלקים. סך הנקודות בחלק הראשון 40, בחלק השני 30, ובחלק השלישי 30.
בסך הכל 100 נקודות.
עליכם לנמק את קביעותיכם, לפרט את חישוביכם ולצטט במדויק כל טענה שאתם מסתמכים עליה.

בעמוד הראשון של מחברת הבחינה עליכם לרשום בראש העמוד מהן השאלות שעניתם עליהן ושאתם רוצים שייבדקו.

בהצלחה

חלק I

ענו על שתים מתוך שלוש השאלות 1-3. אין להסתמך על משפטים שקולים או משפטים הנובעים מהטענה שבשאלה. (20 נקודות לשאלה).

שאלה 1

הוכיחו את משפט המכפלה של דטרמיננטות, דהיינו : אם B, A מטריצות ריבועיות מסדר n מעל שדה F, אז $\det(AB) = \det A \det B$. ($\det$ זו הדטרמיננטה).

שאלה 2

הוכיחו את משפט הממדים, דהיינו : אם W, U הם תת-מרחבים בעלי ממד סופי של מרחב וקטורי V מעל שדה F, אז גם תת-המרחב $U+W$ של V הוא בעל ממד סופי, ומתקיים :
$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

שאלה 3

יהיו V, W, U מרחבים וקטוריים מעל שדה F, כולם בעלי ממד סופי. יהיו B_3, B_2, B_1 בסיסים ל- V, W, U, בהתאמה. תהי $S: V \to W$ ו- $T: W \to U$ העתקות לינאריות.

הוכיחו ש- $[TS]_{B_3}^{B_1} = [T]_{B_3}^{B_2}[S]_{B_2}^{B_1}$. (למכפלת ההעתקות מתאימה מכפלת המטריצות).

חלק II

ענו על שתים מתוך שלוש השאלות 6-4 (15 נקודות לשאלה).

שאלה 4

יהיו m , n מספרים טבעיים כך ש- $2 < m < n$. יהיו A מטריצה מסדר $m\times n$ ו- B מטריצה מסדר $n\times m$ מעל שדה F.

א. הוכיחו שהמטריצה BA אינה הפיכה.

ב. האם יתכן ש- AB הפיכה?

שאלה 5

יהיו V , W מרחבים וקטוריים מעל שדה F , שהם נוצרים סופית ובעלי ממד גדול מ-1.

נניח ש- $\dim_F \mathrm{Hom}(V,W) = 10$. ($\mathrm{Hom}(V,W)$ הוא מרחב ההעתקות הלינאריות מ- V ל- W).

תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית שהיא **על** W. הוכיחו ש- $\dim \mathrm{Ker}T = 3$.

שאלה 6

יהי V מרחב הפולינומים ממעלה קטנה מ-3 מעל R (כולל פולינום האפס) עם הפעולות הרגילות של חיבור פולינומים וכפל פולינום בסקלר ממשי. תהי B סדרת הפולינומים $(x^2, x+x^2, 1+x)$.

א. הוכיחו ש- B בסיס של V.

ב. תהי $T:V\to V$ העתקת הגזירה ($Tp = p'$). חשבו את המטריצה $[T]_B^B$

(המטריצה של T לפי הבסיס B בתחום ובטווח).

חלק III

ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות 7-10 (10 נקודות לשאלה).

שאלה 7

תהי A המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix}$. הוכיחו שאם $n > 2$, אז $\det A = 0$.

שאלה 8

תהי $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ קבוצה בלתי תלויה של וקטורים במרחב V, ויהי u וקטור ב- V.

הוכיחו שאם u אינו צירוף לינארי של $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, אז $\dim(\mathrm{Sp}\{v_1, v_2, v_3, v_4, u\}) = 5$

ו- $\dim(\mathrm{Sp}\{u + v_1, u + v_2, u + v_3, u + v_4\}) = 4$.

שאלה 9

יהי V מרחב וקטורי בעל ממד סופי מעל שדה F ויהיו $T,S : V \to V$ העתקות לינאריות.

נניח שקיים בסיס B של V שלפיו S,T מיוצגות על ידי מטריצות אלכסוניות.

הוכיחו ש- $TS = ST$. (TS היא ההרכבה של T על S, וכיוצא בזה ST).

שאלה 10

לאילו ערכי α המטריצה $\begin{pmatrix} \alpha & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ מעל השדה Z_5 הפיכה, ולאילו ערכי α אינה הפיכה?

(Z_5 הוא שדה השאריות מודולו 5).

בהצלחה