80.134
1

80134 **בחינה באלגברה ליניארית (1)**

הזמן: 3 שעות

מועד א' תשע"ע יום ראשון ט"ז בשבט תש"ע 31.1.2010 שעה 10^{00}

המורים: פרופ' אליהו ריפס, ד"ר יבגני סטרחוב, שמואל ברגר

משך המבחן 3 שעות.

יש במבחן שלושה חלקים. סך הנקודות בחלק הראשון 40, בחלק השני 30, ובחלק השלישי 30.
בסך הכל 100 נקודות.

בעמוד הראשון של מחברת הבחינה עליכם לרשום בראש העמוד מהן השאלות שעניתם עליהן ושאתם רוצים שייבדקו.

בהצלחה

חלק I

ענו על שתים מתוך שלוש השאלות 1-3. אין להסתמך על משפטים שקולים או משפטים הנובעים מהטענה שבשאלה. (20 נקודות לשאלה).

שאלה 1

יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל שדה F, כאשר V בעל מימד סופי מעל F.

תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית.

הוכיחו ש- $\dim_F \mathrm{Ker}T + \dim_F \mathrm{Im}T = \dim_F V$.

($\mathrm{Ker}T$ הוא הגרעין של T, $\mathrm{Im}T$ הוא תמונת T ו- $\dim_F$ הוא המימד מעל F).

שאלה 2

הוכיחו שלכל מטריצה ריבועית A מעל שדה F $\det A = \det A^T$.

($\det$ היא הדטרמיננטה ו- A^T היא המטריצה המשוחלפת (transposed)).

שאלה 3

נתונה מערכת משוואות (*)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(כל a_{ij} וכל b_j לקוח משדה מסוים F).

או בצורה מטריציאלית $A\underline{x} = \underline{b}$.

יהי $\underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ פתרון מסוים של המערכת (*). ($\underline{c} \in F^n$).

80.134

תשע"ד/א/

הוכיחו שאוסף הפתרונות של המערכת (*) הוא האוסף הבא של וקטורים ב- F^n :

$\underline{c}+\mathrm{Ker}T_A=\{\underline{c}+\underline{v}\mid \underline{v}\in \mathrm{Ker}T_A\}$,

כאשר $T_A:F^n\to F^m$ היא ההעתקה הלינארית $T_A(\underline{v})=A\underline{v}$.

<u>חלק II</u>

ענו על שתים מתוך שלוש השאלות 6-4 (15 נקודות לשאלה).

שאלה 4

יהיו A ו-A' מטריצות מסדר $m\times n$ מעל השדה F, כך ש-A' מתקבלת מ-A על ידי החלפת שתי עמודות זו בזו. הוכיחו שאם למערכת המשוואות $A\underline{x}=\underline{b}$ יש פתרון יחיד, אז גם למערכת $A'\underline{x}=\underline{b}$ יש פתרון יחיד.

שאלה 5

תהי A מטריצה ריבועית מסדר n מעל שדה F ($n\geq 2$). הוכיחו ש-A מקיימת $AB=BA$ לכל מטריצה ריבועית B מסדר n מעל F, אם ורק אם קיים c ב-F, כך שכל איברי האלכסון הראשי של A שווים ל-c וכל שאר האיברים במטריצה שווים ל-0.

לשון אחר: $A=cI$, כאשר I היא מטריצת היחידה.

שאלה 6

יהי V מרחב וקטורי מעל השדה F, ויהי U תת-מרחב של V בעל מימד סופי מעל F. יהיו $v,w\in V$.

הוכיחו שאם $\dim_F(U+\mathrm{Sp}(\{v+w\}))<\dim_F(U+\mathrm{Sp}(\{v\}))$, אז v ו-w אינם ב-U.

<u>חלק III</u>

ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות 10-7 (10 נקודות לשאלה).

שאלה 7

הוכיחו או הפריכו:

יהי $V=\mathrm{R}[x]$ מרחב הפולינומים מעל שדה המספרים הממשיים R עם הפעולות הרגילות.

תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. T היא חד-חד-ערכית אם ורק היא על.

שאלה 8

חשבו את המטריצה ההפוכה למטריצה $\begin{pmatrix}0&0&0&0&a\\0&0&0&b&0\\0&0&c&0&0\\0&d&0&0&0\\e&0&0&0&0\end{pmatrix}$ מעל השדה F, כאשר e,d,c,b,a הם איברים ב-F, השונים כולם מ-0.

80.134

תשע"ג/א'

שאלה 9

נתונה מערכת המשוואות הבאה מעל שדה המספרים הממשיים R :

$$\begin{cases} x+y+z=c \\ x+2y+3z=c-6 \\ 2x-2z=4c \end{cases}$$

לאילו ערכי c :

א. אין פתרון למערכת.

ב. יש יותר מפתרון אחד למערכת.

ג. יש פתרון יחיד למערכת.

יש לנמק את התשובות.

שאלה 10

נתונה מטריצה ריבועית A מעל שדה F , המקיימת $A^2 = A+I$.

הוכיחו ש- $\det A \neq 0$

בהצלחה