80.134
תשס"ט/ב'

אלגברה לינארית 1 (80134)
מועד ב' התשס"ט

מורים: פרופ' אלכס לובוצקי
פרופ' איליה ריפס
מר איתמר צביק

י"א ניסן התשס"ט
5.4.2009
משך המבחן: 3 שעות

הנחייה כללית למבחן: ניתן להסתמך על טענות ומשפטים שהוכחו בכיתה, בתנאי שאינם שקולים למה שצריך להוכיח בשאלה, ובתנאי שמצטטים אותם במדויק.

חלק א'
הוכיחו שניים מבין שלושת המשפטים הבאים (כ"א 20 נקודות).

1. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה F, ויהיו $U,W \subseteq V$ תתי מרחבים. אזי $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$.

2. יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל השדה F, ויהי $U \subseteq V$ תת מרחב. אזי גם U נוצר סופית.

3. יהיו $A,B \in M_n(F)$ מטריצות ריבועיות. אזי $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

חלק ב'
ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות (כ"א 15 נקודות).

4. מטריצה ריבועית $A=(a_{i,j}) \in M_n(F)$ תיקרא סימטרית אם $a_{i,j}=a_{j,i}$ לכל $1 \le i,j \le n$. מצאו בסיס למרחב המטריצות הסימטריות בגודל 3×3. נמקו תשובתכם.

5. יהי F שדה. נתונים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in F^3$ שלושה וקטורים בלתי תלויים לינארית, ונגדיר $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \in F^3$. הוכיחו כי כל תת קבוצה בגודל 3 של הקבוצה $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ היא בלתי תלויה לינארית.

6.

א. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ויהי $B=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ בסיס ל-V. הגדירו את הבסיס הדואלי לבסיס B.

המשך מעבר לדף

80. 134

תשס"ו / ב'

ב. חשבו את הבסיס הדואלי לבסיס הבא של R^3 : $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}\right\}$.

הסבירו תשובתכם.

7. נגדיר העתקה לינארית $T:R^2 \to R^2$ ע"י $T(x,y)=(-3x+15y,-2x+8y)$

א. ייצגו את T ע"פ הבסיס הסטנדרטי E של R^2. נסמן מטריצה זו ב-M.

ב. ייצגו את T ע"פ הבסיס הבא של R^2 : $B=\{(3,1),(5,2)\}$.

ג. חשבו את מטריצות מעבר הבסיס $[Id]_E^A,[Id]_A^E$.

ד. השתמשו בסעיפים הקודמים כדי לחשב את M^{50}.

בכל אחד מן הסעיפים לעיל עליכם להסביר את מהלך הפתרון.

__חלק ג'__

ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות (כ"א 5 נקודות).

8. יהי F שדה. האם הקבוצה $\{A\in M_2(F): A^2=0\}$ מהווה תת מרחב של $M_2(F)$? נמקו תשובתכם.

9. יהיו $A\in M_{n\times m}(F)$ ו $B\in M_{m\times n}(F)$ עבור $m<n$. האם ייתכן AB הפיכה? האם ייתכן BA הפיכה? נמקו תשובתכם.

10. יהי V מרחב וקטורי מעל השדה F, ויהי $0\neq\alpha\in V$ המקיים $\alpha+\alpha+\alpha=0$. הוכיחו כי לכל $\beta\in V$ מתקיים $\beta+\beta+\beta=0$.

11. הוכיחו או הפריכו: קיים שדה $R\subset F\subset C$ כאשר R שדה הממשיים ו- C שדה המרוכבים (הכוונה להכלה ממש).

בהצלחה!