

אלגברה לינארית 1 (80134)
מועד א' התשס"ט

כ"א שבט התשס"ט
15.2.2009
משך המבחן: 3 שעות

מורים: פרופ' אלכס לובוצקי
פרופ' איליה ריפס
מר איתמר צביק

הנחייה כללית למבחן: ניתן להסתמך על טענות ומשפטים שהוכחו בכיתה, בתנאי שאינם שקולים למה שצריך להוכיח בשאלה, ובתנאי שמצטטים אותם במדויק. עליכם לכתוב את המבחן בעט, בצד השמאלי של המחברת (צד ימין ישמש לטיוטא).

חלק א'

הוכיחו שניים מבין שלושת המשפטים הבאים (כ"א 20 נקודות).

1. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה F , יהי W מרחב וקטורי מעל F ותהי $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית. אזי $\dim(Ker(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(V)$.
2. יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל השדה F . אזי ל- V יש בסיס.
3. תהי $A \in M_n(F)$ מטריצה ריבועית. אזי A הפיכה אם ורק אם A מדרגה n .

חלק ב'

ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות (כ"א 15 נקודות).

4. לאילו ערכי c המטריצה הבאה הפיכה מעל הממשיים? $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & c \end{pmatrix}$

5. מה מספר הפתרונות של המערכת הבאה מעל השדה Z_5 ?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

הסבירו תשובתכם.

6. תנו דוגמא למרחב וקטורי V ותתי מרחבים שלו U_1, U_2, U_3 כך שמתקיימים שני התנאים הבאים בו-זמנית:

א. $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{0\}$

ב. $U_1 + U_2 = U_1 + U_3 = U_2 + U_3 \neq \{0\}$

המשך מעבר לדף

7. יהיו V מרחב וקטורי מעל שדה F , $A \subset V$ תת קבוצה סופית ו $\alpha \in V$ וקטור כלשהו. הוכיחו כי אם A בלתי תלויה לינארית, ו- α אינו צירוף לינארי של איברי A אזי הקבוצה $A \cup \{\alpha\}$ בלתי תלויה לינארית.

חלק ג'

ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות (כ"א 5 נקודות).

8. יהי F שדה. האם הקבוצה $\{(a,b) \in F^2 : a^2 + b^2 = 0\} \subset F^2$ מהווה תת מרחב של F^2 עבור $F = R$ (שדה הממשיים)? עבור $F = C$ (שדה המרוכבים)?

9. מטריצה $A \in M_n(F)$ תיקרא אנטי-סימטרית אם $A^T = -A$ (הינה המטריצה המוחלפת של A).
יהי n מספר אי זוגי, ותהי A מטריצה אנטי-סימטרית מסדר $n \times n$. חשבו את הדטרמיננטה של A .

10. יהי V מרחב וקטורי שאינו נוצר סופית מעל השדה F , יהי W מרחב וקטורי נוצר סופית מעל F , ותהי $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית שהיא על W . הוכיחו כי T אינה חד-חד-ערכית.

11. מטריצות $A, B \in M_n(F)$ תיקראנה דומות אם קיימת מטריצה הפיכה $P \in M_n(F)$ כך ש $B = P^{-1}AP$. האם המטריצות הבאות דומות?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 9 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

בהצלחה!